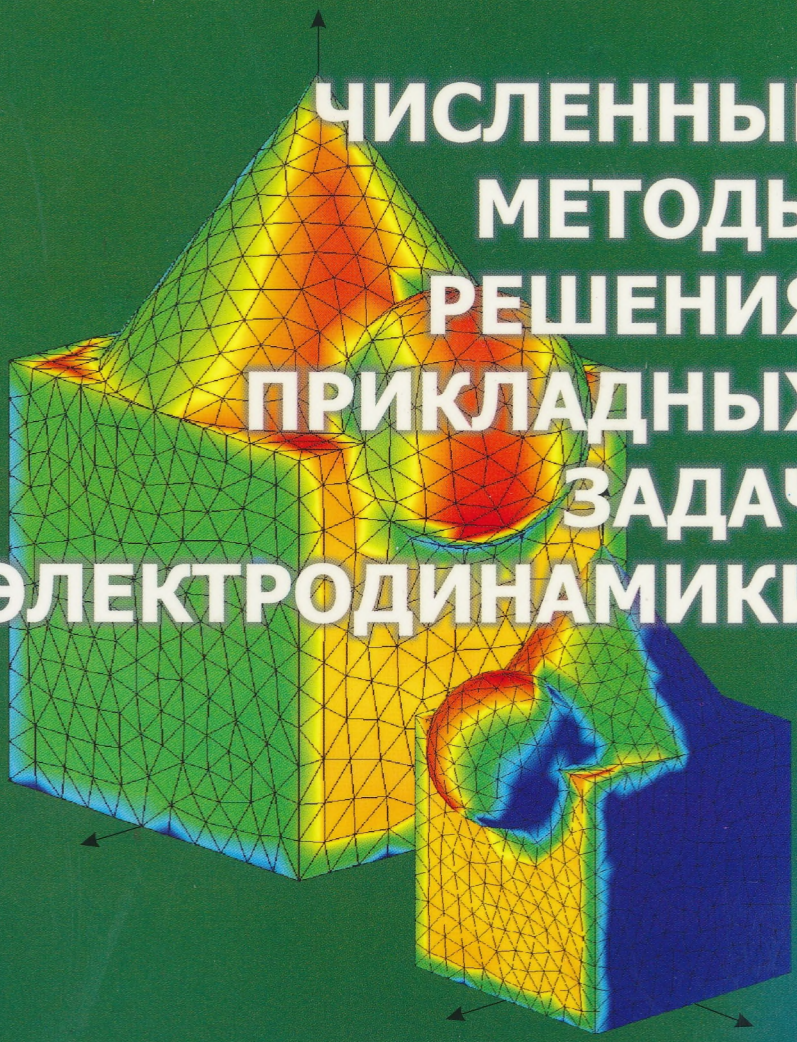
А. Ю. Гринев

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ



РАДИОТЕХНИКА

А. Ю. Гринев ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

А. Ю. Гринев

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Рекомендовано
учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации
по образованию в области
радиотехники, электроники, биомедицинской техники и автоматизации
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению 210300 «Радиотехника»

Издательство «Радиотехника»
Москва 2012

УДК 621.396.6 (075)
ББК 32.86
Г 85

Рецензенты:
А.С. Ильинский – докт. физ.-мат. наук, профессор,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова;
В.Н. Малышев – докт. техн. наук, профессор,
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет;
кафедра «Техническая электродинамика и антенны»,
Московский государственный технический университет связи и информатики
(зав. кафедрой, докт. техн. наук, профессор ***В.В. Чебышев***)

Гринев А. Ю.

Г 85 **Численные методы решения прикладных задач электродинамики**. Учеб. пособие. – М.: Радиотехника, 2012. – 336 с.: ил.

ISBN 978-5-88070-304-3

Рассмотрены базовые численные методы решения электродинамических задач. Дано самое общее, но адекватное представление о принципах решения задач электродинамики, используемых в программных продуктах на основе ММ, МКР, МКРВО и МКЭ, а также об их возможностях и ограничениях. Для конечно-разностных методов последовательно, переходя от простого (одномерного) к сложному (трехмерному) случаю, обсуждаются: конечно-разностные схемы алгоритмов МКР, МКРВО и МКЭ, выбор пространственных (временных) шагов, явление численной дисперсии, стабильность решения, обоснование источников возбуждения и выбор граничных условий для ограничения области моделирования. Приведено описание пакетов программ для численного анализа электромагнитных полей с помощью указанных методов. Представлены примеры процедур численного анализа.

Для преподавателей и студентов радиотехнических специальностей вузов. Может быть полезно очевидной триаде участников процесса проектирования СВЧ-устройств, антенн и решения задач рассеяния: разработчикам электродинамических методов (подходов, алгоритмов), программистам и пользователям ЭВМ.

ISBN 978-5-88070-304-3

УДК 621.396.6 (075)
ББК 32.86

© Авторы, 2012
© ЗАО «Издательство «Радиотехника»», 2012

Учебное издание

Численные методы решения прикладных задач электродинамики
Автор:
доктор технических наук, профессор
Александр Юрьевич Гринев

Изд. № 16. Сдано в набор 01.09.2011. Подписано в печать 03.11.2011.
Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная
Печ. л. 21. Тираж 500 экз. Зак. №

Издательство «Радиотехника»
107031, Москва, К-31, Кузнецкий мост, д. 20/6
Тел./факс: (495) 621-48-37; 625-78-72, 625-92-41
e-mail: info@radiotec.ru; www. radiotec.ru

Отпечатано в типографии ООО «Галлея-Принт»
Тел.: (495) 673-57-85; факс: (495) 777-81-28
e-mail: galleyaprint@gmail.com
http://galleyaprint.ru

Предисловие

Курс «Электродинамика и распространение радиоволн» в соответствие с Государственным общеобразовательным стандартом является общеобразовательной дисциплиной для радиотехников (как и для ряда других направлений подготовки). Численные методы решения задач электродинамики затрагиваются на лекциях при изучении тем «Направляющие системы и направляемые волны», «Излучение и дифракция электромагнитных волн», частично на практических занятиях, при выполнении курсовых и компьютерных лабораторных работ. Однако внимание в отечественной учебной литературе, предназначенной для радиотехников, к численным методам решения прикладных задач электродинамики (в первую очередь к конечно-разностным) неоправданно мало. В то же время бурное развитие цифровых технологий во многом изменило как смысл самого понятия «радиотехника», так и требования, предъявляемые к подготовке специалистов в этой области, сделав необходимыми новые знания и умения.

Действительно, в настоящее время, благодаря существенному прогрессу в развитии вычислительной техники и надежной основе в виде системы уравнений Максвелла, наблюдается качественный прорыв проектирования СВЧ-устройств, антенн, решении задач рассеяния и т.п. Сложилась очевидная триада участников этого процесса: разработчики электродинамических методов (подходов, алгоритмов), программисты и пользователи. Последние реализуют конкретные проекты в условиях ограниченных сроков и усложненных требований к создаваемой продукции и, как правило, не обладают необходимой квалификацией, временными и финансовыми ресурсами для разработки пакетов программ необходимого уровня. Между тем разработаны уникальные коммерческие программные продукты, обладающие необходимой общностью моделирования и оптимизации электромагнитных полей в сложных СВЧ-устройствах и антеннах способные не только существенно облегчить жизнь пользователей, но и позволяющие создавать более совершенные приборы и устройства.

Одним из важных качеств современного радиоинженера-разработчика антенн и СВЧ-устройств является умение приспосабливать конкретные задачи к имеющимся пакетам программ при безусловном понимание основных идей и базовых электродинамических принципов этих программ. Кроме того, логика развития радиотехнических прило-

жений приводит к необходимости трансформирования и введению новых разделов в стандартный курс «Электродинамика и распространение радиоволн».

Цель настоящего учебного пособия – донести до читателя прежде всего идею выбранных, современных численных методов решения прикладных задач электродинамики, расставив вехи на пути освоения этих методов, что может помочь при дальнейшем их изучении или использовании готовых программ, их реализующих.

Целесообразность издания данного пособия сформировалась в результате общения с инженерами ряда научно-исследовательских предприятий, разрабатывающих антенны и СВЧ-устройства, а также студентами старших курсов, специализирующихся в указанной области. Главная сложность заключалась в том, чтобы, не перегружая материал деталями, изложить основную суть того или иного метода.

Хотя автор старался не погружаться в функциональный анализ, в определенных местах обойтись совсем без его некоторых первичных понятий не смог (или не захотел, поскольку, взглянув на некоторые положения чуть-чуть сверху, можно увидеть их гораздо отчетливее).

Учебное пособие составлено на основе прочитанных автором в Московском авиационном институте (Государственном техническом университете) разделов лекций в курсе «Электродинамика и распространение радиоволн», практических занятий, курсовых и компьютерных лабораторных работ по тематике численных методов решения задач электродинамики, также используемых в курсе «Устройства СВЧ и антенны».

Автор глубоко признателен сотрудникам Проблемной лаборатории, которые принимали участие в написании отдельных материалов: к.т.н. Д.В. Багно (п.п. 8.1–8.8), к.т.н. А.И. Гиголо (Приложение 3), к.т.н. Е.В. Ильину (гл. 7) и кафедры «Радиофизика, антенны и микроволновая техника» (зав. кафедрой профессор, д.т.н. Д.И. Воскресенский).

Автор благодарен рецензентам: д.физ.-мат.н., проф. А.С. Ильинскому (МГУ им. М.В. Ломоносова); д.т.н., проф. В.Н. Малышеву (ЛЭТИ) и д.т.н., проф. В.В. Чебышеву (МТУСИ). Их советы и ценные замечания способствовали улучшению качества книги.

Введение

Проектирование СВЧ-устройств, антенн начинается с выбора *физической модели*, основанной на определенном уровне знания физических процессов, происходящих в устройстве. При этом нужно выделить наиболее существенные черты явления и отбросить второстепенные. Так, например, в традиционном курсе при нахождении электрических волн в прямоугольном металлическом волноводе решение для вектора напряженности электрического поля искалось в виде бегущей волны $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m e^{i\omega t} = \mathbf{e}(x,y) e^{i(\omega t - \gamma z)}$ с неизвестными амплитудой $\mathbf{e}(x,y)$ и постоянной распространения γ. *Математические модели* в электродинамике базируются на уравнениях Максвелла (или вытекающих из них) при учете тех или иных условий, что дает исчерпывающие сведения о конкретном физическом процессе. Иными словами, математические модели электродинамики должны быть адекватны физической реальности. Правильное формулирование задачи на языке математики – это научная проблема, не менее сложная, чем само решение задачи [1–10]. Математическая модель в приведенном примере формулировалась в виде краевой задачи для скалярного уравнения Гельмгольца относительно продольной компоненты электрического поля [11, 12]:

$$\nabla_\perp^2 e_z + \chi^2 e_z = 0, \qquad e_z = 0 \text{ на } l_\perp, \tag{В.1}$$

где под $l_\perp$ понимается идеально проводящий контур поперечного сечения волновода.

Точное решение электродинамической задачи для выбранной математической модели (как правило) возможно лишь в случае, когда исходная физическая проблема (а следовательно, и математическая модель) упрощена за счет ряда идеализаций. Выше в выражении (В.1) полагалось, что стенки волновода являются идеально проводящими, сечение $l_\perp$ – однородное, а сама структура – бесконечно протяженная в направлении распространения волны.

В силу *теоремы единственности* электродинамический анализ структуры сводится к нахождению решения уравнений Максвелла с краевыми условиями на границе и условием на ребрах. Если рассматривается внешняя задача, то для однозначности решения краевой задачи формулируется дополнительное условие на бесконечности (условие

Зоммерфельда). Электродинамический анализ может проводиться как в частотной (гл. 1–3, 5), так и во временной (гл. 4) областях с использованием уравнений Максвелла в *интегральной* или *дифференциальной* форме. При этом область, в которой ищется решение, может подвергаться разбиению (созданию сетки), что приводит к *дискретизационным методам*: *методу конечных разностей* (гл. 3,4) и *методу конечных элементов* (раздел 5).

При выборе *метода решения* приходится полагаться на опыт предшествующего решения задач, на возможности метода (сложность области решения, неоднородность среды, вычислительные ресурсы и т.д.), интуицию и сравнение с экспериментом, а также отвечать за достоверность результатов. Отметим численные методы решения электродинамических задач, рассмотренные в книге. Проекционные методы: моментов – ММ (в англоязычном варианте – method of moments) и Ритца; метод конечных разностей – МКР (finite difference method – FDM); метод конечных разностей во временной области – МКРВО (finite difference time-domain method – FDTD) и метод конечных элементов – МКЭ (finite element method – FEM).

Сильной стороной ММ является удобство моделирования рассеяния на металлических телах, поскольку анализ сводится к решению поверхностных интегральных уравнений и не требуется дискретизации области решения вне тел. Однако для ММ проблема сложных сред, имеющих сложную форму, всегда связана с поиском подходящего представления функции Грина, выражающей поля в структуре через токи на некоторых поверхностях. Эта работа связана с аналитическими преобразованиями, которые выполняются не компьютером, а разработчиком программы. В тоже время использование функции Грина существенно уменьшает размерность решаемой задачи. В ряде интересных случаев, например плоскослоистой среды, функции Грина известны и для них разработаны эффективные численные алгоритмы.

Особый случай – это антенные задачи, т.е. задачи, связанные с расчетом излучения в свободное пространство. Поскольку функция Грина свободного пространства хорошо известна, то, следовательно, и реализация ММ здесь не должна вызывать затруднений. В то же время при расчете поля в дальней зоне на основе МКЭ необходимо дискретизировать достаточно большую область пространства. Поэтому в этих задачах можно ожидать преимущества ММ по сравнению с МКЭ.

МКРВО достаточно прост при формулировке, сеточной дискретизации и реализации, легко учитывает анизотропные и неоднородные материалы. Эффективность метода обусловлена отсутствием матричных уравнений и возможностью за один проход с помощью Фурье-преобразования проанализировать характеристики в полосе частот.

МКЭ обладает существенными достоинствами для анализа в частотной области сложных СВЧ и антенных конструкций: алгоритмическая простота, универсальность, естественный учет неоднородных, анизотропных и дисперсионных сред. Этот метод обладает некоторыми свойствами, сближающими его с ММ. Действительно, в методе моментов все поля в структуре выражаются через некоторую величину, заданную на поверхности (электрический или магнитный ток). Отличие от ММ состоит в том, что последний не требует дискретизации пространства и оперирует непрерывными полями и токами, тогда как МКЭ принципиально основан на дискретизации пространства. Поэтому в тех случаях, где ММ может быть реализован, он приводит к увеличению скорости решения и экономии компьютерных ресурсов. Однако там, где решение с помощью ММ затруднительно, МКЭ всегда даст результат.

На основе МКРВО и МКЭ созданы программные продукты, обладающие необходимой общностью моделирования и оптимизации электромагнитных полей в сложных СВЧ-устройствах и антеннах. Программное обеспечение содержит программу черчения трехмерных объектов, программу расчета, включающую несколько методов решения граничных задач, и пост-процессор для обработки и детального анализа полученных результатов. Используя их, можно рассчитать: ближнее электромагнитное поле антенн (рассеивателей) и поле в дальней зоне; характеристические импедансы портов и постоянные распространения в регулярных линиях передачи, подключенных к портам; одномодовые и многомодовые матрицы рассеяния устройств; собственные волны и собственные колебания различных волноведущих и резонансных структур. Перед решением электродинамической задачи необходимо начертить анализируемое устройство, задать материалы для каждого объекта, указать порты и граничные условия на поверхностях. Затем рассчитывается электромагнитное поле в каждой точке исследуемой структуры и определение по этим данным S-параметров и других характеристик.

После завершения расчетов следует этап анализа и освоения результатов. Большое значение при этом имеет их наглядность и доступность представления. Существенным моментом в прикладной работе является необходимость получения результатов в установленный срок. Лучше найти по возможности удовлетворительное решение задачи, но в срок, чем получить полное решение задачи к тому времени, когда оно уже станет ненужным.

Книга состоит из восьми глав и трех приложений. Глава 1 посвящена общим вопросам макроскопической электродинамики и включена как базовая, поскольку используется в последующих главах. Условная классификация аналитических и численных методов, их достоинства и недостатки отмечены в конце главы.

Глава 2 содержит изложение общих схем решения краевых задач электродинамики на основе классических проекционных методов: моментов и вариационного метода Ритца. Метод моментов рассматривается с дифференциальных уравнений, а метод Ритца – с вариационной формулировки задачи. Важной особенностью при этом являются обсуждение ортогональных систем функций и ортогональных рядов, выбор базисных и проекционных функций.

В главе 3 изложен МКР, базирующийся на решении дифференциальных уравнений в частных производных, представленных в конечно-разностной форме. Метод конечных разностей создает промежуточную базу для МКРВО. Применение метода показано на примерах определения емкости линии из двух неоднородно заполненных пластин и расчета характеристического импеданса и фазовой скорости экранированной микрополосковой линии.

В главе 4 приведены основные этапы МКРВО. Эффективность метода обусловлена отсутствием матричных уравнений и возможностью за один проход с помощью Фурье-преобразования проанализировать характеристики в полосе частот. Одним из отличительных свойств МКРВО является возможность иллюстрировать процесс распространения электромагнитной волны в пространстве с течением времени, т.е. создавать анимацию. Последовательно, переходя от простого (одномерного) к сложному (трехмерному) случаям обсуждаются: конечно-разностная схема алгоритма МКРВО (процедура со смещенными сетками), выбор пространственных шагов и явление численной дисперсии, выбор временного шага и стабильность решения, обоснование источников возбуждения. Ключевой вопрос этой главы – выбор условий для ограничения области моделирования, называемых абсолютно поглощающими граничными условиями – АВС: аналитическими, сформулированными в виде математических соотношений, и материальными, использующими слои с комплексными электрофизическими параметрами. Приводится описание пакета программ для численного анализа электромагнитных полей с помощью МКРВО.

В главе 5 рассмотрены основные этапы МКЭ: дискретизация пространства на элементы, выбор функций формы элемента, процедура объединения элементов и ограничение области моделирования для определения характеристик антенн и полей рассеяния. Продемонстрированы реализации одномерных и двумерных краевых задач МКЭ процедурами Ритца, Бубнова-Галеркина и алгоритмом взвешенной невязки. Решение трехмерных векторных задач с помощью МКЭ проведено алгоритмами взвешенной невязки и в вариационной формулировке. При этом введенные векторные краевые функции элемента позволяют преодолеть трудности учета граничных условий при аппроксимации векторных задач традиционными скалярными узловыми функциями эле-

мента. Обсуждены точность и численная дисперсия МКЭ. Приведено описание пакета программ для численного анализа электромагнитных полей с помощью МКЭ.

Глава 6 посвящена интегральным представлениям и интегральным уравнениям, главная ценность которых состоит в том, что с их помощью многие задачи рассеяния и возбуждения электромагнитных волн, сначала формулируемые в терминах дифференциальных уравнений, удается свести к интегральным уравнениям, в которых условия для открытых областей (условия излучения) уже учтены при выборе функции Грина. Последующее решение ММ не должно вызывать затруднений. В начале главы введены функции Грина в пространственной и спектральной формах, выведено в скалярном случае интегральное представление для поля в пространстве через функцию Грина, посредством которого для двумерных металлических и диэлектрических тел сформулированы интегральные уравнения для внешних задач дифракции. Изложены общие сведения об интегральных уравнениях (Фредгольма второго и первого рода, сингулярных). Даны векторные представления электромагнитного поля в трехмерном случае и векторные интегральные уравнения для внешних задач дифракции, получаемые с помощью функции Грина. Сведение краевой задачи определения собственных чисел и собственных функций к интегральному уравнению при решении внутренней задач электродинамики рассмотрено на конкретном примере Г-образного волновода с продольно-однородным заполнением. Глава завершается выводом соотношений в частотной и временной областях для определения поля излучения (рассеяния) в дальней зоне по известным значениям полей, рассчитанных в ближней зоне, которые являются необходимым оформлением МКРВО и МКЭ.

В главе 7 изложены методы (алгоритмы) глобальной оптимизации, или методы стохастической оптимизации, применяемые для задач, имеющих множество возможных решений, которые обусловлены многими переменными, а результат существенно зависит от сочетания этих переменных. Обычно методы глобальной оптимизации применяют, когда число возможных решений слишком велико и перебрать их невозможно, а оптимизируемая целевая функция (оптимизационный функционал) является невыпуклой и многопараметрической. Последовательно в рамках единой схемы (идея алгоритма, описание алгоритма, пример оптимизации невыпуклой целевой функции) рассмотрены два алгоритма глобальной оптимизации: генетический (ГА) и роя пчел. Проведено сравнение метода пчел и ГА.

В главе 8 представлены два примера процедуры численного моделирования, которая, по мнению автора данного пособия, должна предшествовать этапам реализации технического устройства. Первый пример – моделирование характеристик щелевых металлодиэлектрических

неоднородных излучателей в составе многоэлементной фазированной антенной решетки (ФАР) – вызван необходимостью расширения полосы рабочих частот антенного полотна ФАР до двух октав при сохранении широкого сектора сканирования. Это обеспечит существенное продвижение в решении существующих проблем по созданию нового поколения многофункциональных радиоэлектронных комплексов с ФАР (активных ФАР – АФАР). Второй пример – моделирование задачи восстановления параметров дорожных покрытий, зондируемых сверхширокополосным короткоимпульсным сигналом. Подобная процедура позволяет повысить достоверность диагностики, увеличить в несколько раз оперативность мониторинга, исключить трудоемкие инвазивные процедуры контрольного бурения, сократить расходы на эксплуатацию, создать устойчивую, ежегодно обновляемую базу данных эксплуатируемых объектов подповерхностной инфраструктуры.

В трех приложениях приведены некоторые сведения о пространствах, функционалах и операторах, дана классификация матриц, а также описание и функции программы двумерного электродинамического моделирования «МАКСВЕЛЛ +» со счетным ядром на основе метода конечных разностей во временной области. На основе данной программы реализован широкий спектр учебных компьютерных лабораторных работ.

Следует иметь в виду, что материал представленный ниже, не претендует на полное и последовательное изложение отмеченных методов. Он достаточно подробно изложен во многих специальных работах, представляющих в большей степени интерес для специалистов в области вычислительной прикладной электродинамики, чем для инженеров – пользователей программных продуктов. Свою цель автор видел в том, чтобы читатель мог получить самое общее, но адекватное представление о принципах решения задач электродинамики, используемых в программных продуктах на основе ММ, МКР, МКРВО и МКЭ, а также об их возможностях и ограничениях.

Список сокращений

АВС	–	абсолютно поглощающее граничное условие (absorbing boundary condition – ABC)
АР	–	антенная решетка
АФАР	–	активная фазированная антенная решетка
АФР	–	амплитудно-фазовое распределение
ГА	–	генетический алгоритм
ДН	–	диаграмма направленности
КСВ	–	коэффициент стоячей волны
КУ	–	коэффициент усиления
МВ	–	метод возмущений
МВД	–	метод вычислительной диагностики
МКФ	–	метод конформных преобразований
МКРВО	–	метод конечных разностей во временной области (метод КРВО) (FDTD – finite difference time-domain method)
МКР	–	метод конечных разностей (метод КР)
МКЭ	–	метод конечных элементов (метод КЭ) (FEM – finite element method)
ММ	–	метод моментов
ММ–ГО	–	метод моментов – геометрической оптики
ММ–ГТД	–	метод моментов – геометрической теории дифракции
ММ–ФТД	–	метод моментов – физической теории дифракции
ММ–ФО	–	метод моментов – физической оптики
МНИ	–	металлодиэлектрический неоднородный излучатель
МРП	–	метод разделения переменных
МФП	–	метод фурье-преобразования
ППМ	–	приемо-передающий модуль
ПСС	–	полностью согласованный слой (PML – perfectly matched layer)
РЛС	–	радиолокационная станция
РПЗ	–	радар подповерхностного зондирования
РЧ	–	радиочастный сигнал
СВЧ	–	сверхвысокие частоты
СИУ	–	сингулярное интегральное уравнение
СЛАУ	–	система линейных алгебраических уравнений
СПО	–	специализированное программное обеспечение
СШП	–	сверхширокополосный
ФАР	–	фазированная антенная решетка
ШЛ	–	Штурм–Лиувилль

Список обозначений

$\mathbf{a}$ – векторная величина
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ – скалярное произведение векторов
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ – векторное произведение векторов
(u,v) – скалярное произведение функций
$\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали
∇ – оператор Гамильтона («набла»)
$\nabla_\perp$ – оператор Гамильтона по поперечным координатам
∇^2 – оператор Лапласа
$\nabla_\perp^2$ – оператор Лапласа по поперечным координатам
∇u – градиент
$\nabla\cdot\mathbf{a}$ – дивергенция
$\nabla\times\mathbf{a}$ – ротор
$\|u\|$ – норма функции u
$[\cdot]$ – матрица
$[\cdot]^{-1}$ – обратная матрица
$(\cdot)>$ – вектор-столбец
$<()$ – вектор-строка
δ_{ik} – символ Кронекера
$\delta(x)$ – дельта-функции Дирака
$\mathbf{r},\mathbf{r}'$ – радиус-вектор точек наблюдения и источника (интегрирования)
$\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$ – единичные векторы декартовой системы координат
$F[\mathbf{u}(x)]$ – функционал
$f'(x_0)$ – производная функции в точке x_0
$\mathbf{L}(\cdot)$ – оператор
$\mathbf{L}^*(\cdot)$ – оператор, сопряженный к линейному оператору $\mathbf{L}$
$L_2[a,b]$ – пространство функций с интегрируемым квадратом
$\hat{\mathbf{M}}$ – оператор Максвелла
$O[\cdot]$ – погрешность аппроксимации
$\mathbf{A}$ – векторный электродинамический потенциал
$\mathbf{E}(\dot{\mathbf{E}})$ – вектор напряженности электрического поля (в скобках – комплексный вектор)

$\mathbf{H}(\dot{\mathbf{H}})$ – вектор напряженности магнитного поля (в скобках – комплексный вектор)
$\mathbf{D}(\dot{\mathbf{D}})$ – вектор электрической индукции (в скобках – комплексный вектор)
$\mathbf{B}(\dot{\mathbf{B}})$ – вектор магнитной индукции
$\mathbf{J}$ – вектор плотности электрического тока
$\mathbf{J}_S$ – вектор поверхностной плотности электрического тока
$\mathbf{M}$ – вектор плотности магнитного тока
$\mathbf{M}_S$ – вектор поверхностной плотности магнитного тока
$\mathbf{E}^{\text{ст}}$ – вектор напряженности сторонних электрических сил
$\mathbf{J}^{\text{ст}}$ – вектор плотности стороннего электрического тока
$\mathbf{J}^{\text{пол}}$ – электрический ток поляризации
$\mathbf{M}^{\text{ст}}$ – вектор плотности стороннего магнитного тока
$\mathbf{H}^{\text{ст}}$ – вектор напряженности стороннего магнитного поля
E_θ, E_φ – компоненты вектора электрического поля в сферической системе координат
$E_y^n(i)$ – компонента электрического поля в узлах пространственно-временной сетки
$H_z^{n+1/2}(i+1/2)$ – компонента магнитного поля в узлах смещенной пространственно-временной сетки
$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ – скалярная функция Грина
$K(x,s)$ – ядро интегрального уравнения
Ω_0 – двумерный объект с границей (контуром) Γ_0
$C[a,b]$ – пространство непрерывных функций
C – емкость системы проводников
C_0 – погонная емкость
L – индуктивность
d_x, d_y – шаг расположения элементов в антенной решетке
k_0 – постоянная распространения (волновое число) в вакууме
k – постоянная распространения (волновое число) в среде
$\rho(\dot{\rho})$ – объемная плотность электрических зарядов (в скобках – комплексное значение)
$\rho^m(\dot{\rho}^m)$ – объемная плотность магнитных зарядов (в скобках – комплексное значение)
ε_a, ε и ε_0 – абсолютная, относительная диэлектрические проницаемости среды и вакуума
μ_a, μ и μ_0 – абсолютная, относительная магнитные проницаемости среды и вакуума

σ – удельная электрическая проводимость среды

σ^m – удельная магнитная проводимость среды

$\tilde{\varepsilon}$ – комплексная относительная диэлектрическая проницаемость

$\tilde{\mu}$ – комплексная относительная магнитная проницаемость

η – комплексное относительное сопротивление среды с высоким импедансом

λ – длина волны

γ – постоянная распространения электромагнитной волны

χ – поперечное волновое число

β – постоянная распространения в дискретной среде

υ_ϕ – фазовая скорость

$\upsilon_{\text{гр}}$ – групповая скорость

Δx – пространственный размер ячейки

Δt – временной шаг

ω – циклическая частота

$f(t)$ – временной сигнал

τ_p – характеристическое время

$F(\omega)$ – спектр сигнала

$< \mathbf{N} = (N_i, N_j, N_k)$ – трехмерная функция элемента

Z_0 – волновое сопротивление вакуума

$Z_{\text{В}}$ – волновое сопротивление «среды Беренгера»

$\dot{\mathbf{\Pi}}$ – комплексный вектор Пойнтинга

$U(z,t)$ – напряжение

$I(z,t)$ – электрический ток

R_n, T_n – комплексные амплитуды отраженных и прошедших волн в волноводах

$R_i^{(e)}$ – взвешенная невязка для (e)-элемента

$W^{\text{э}}$ – энергия электростатического поля

$W^{\text{м}}$ – энергия стационарного магнитного поля

Φ_i, Φ_j, Φ_k – узловые значения трехмерной функции элемента

$F_\theta(\theta, \varphi)$ – азимутальная составляющая диаграммы направленности

$F_\varphi(\theta, \varphi)$ – меридиональная составляющая диаграммы направленности

$\mathrm{H}_0^{(2)}(x)$ – функция Ханкеля нулевого порядка 2-го рода

$\mathrm{P}_n(x)$ – многочлены Лежандра

$\mathrm{T}_n(x)$ – полином Чебышева 1-го рода

— ГЛАВА 1 —

Основные соотношения макроскопической электродинамики

В главе приводятся основные положения электромагнитной теории, позволяющей решать широкий спектр задач распространения, отражения и рассеяния, связанных с высокочастотными устройствами.

1.1. Элементы векторного анализа

В теории электромагнитного поля применяется некоторый традиционный математический аппарат, который формализует язык предмета. Это в первую очередь аппарат векторной алгебры и векторного анализа.

1.1.1. Операторы векторного анализа

В дальнейшем будем использовать форму записи уравнений электродинамики с использованием так называемого *оператора Гамильтона* ∇ («набла»), который, например, в декартовой системы координат определяется как

$$\nabla = \mathbf{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$ – единичные векторы декартовой системы координат.

Это символическое обозначение дифференциальной операции, которую можно произвести как над скалярной ψ, так и над векторной $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ функцией. В первом случае имеем

$$\nabla\psi = \mathbf{x}_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} = \operatorname{grad} \psi. \tag{1.2}$$

Во втором, используя формальное правило скалярного произведения

$$\nabla\cdot\mathbf{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\operatorname{div}\mathbf{a}, \tag{1.3}$$

или векторного произведения

$$\left[\nabla,\mathbf{a}\right]=\nabla\times\mathbf{a}=\begin{vmatrix}\mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\operatorname{rot}\mathbf{a}. \tag{1.4}$$

Оператор Гамильтона является, таким образом, удобным средством представления операций векторного анализа, в частности

$$\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi. \tag{1.5}$$

Оператор $\nabla^2\equiv\Delta$ называется *оператором Лапласа.* Его очевидным образом можно применять и к векторным функциям.

1.1.2. Векторные тождества

Векторные тождества играют важную роль при выводе различных соотношений, вытекающих из уравнений Максвелла. Следующие четыре тождества векторного анализа, вывод которых достаточно прост, имеют значение правил дифференцирования произведения функций:

$$\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi, \tag{1.5а}$$

$$\nabla\cdot(\Psi\mathbf{a})=\Psi\nabla\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\nabla\Psi, \tag{1.5б}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}(\nabla\times\mathbf{a})-\mathbf{a}(\nabla\times\mathbf{b}), \tag{1.5в}$$

$$\nabla\times(\Psi\mathbf{a})=\Psi(\nabla\times\mathbf{a})+(\nabla\Psi)\times\mathbf{a}. \tag{1.5г}$$

Еще два тождества будут также использованы далее:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{a})=\nabla^2\mathbf{a}, \tag{1.6а}$$

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=0,\qquad\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a})=0. \tag{1.6б}$$

1.2. Система уравнений электродинамики – уравнения Максвелла

В основе электродинамики лежит полная система уравнений Максвелла, которая позволяет анализировать различные электромагнитные процессы.

1.2.1. Система уравнений электродинамики

Основные уравнения электродинамики в дифференциальной форме для произвольной временной зависимости и изотропной среды имеют вид [11–16]:

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}, \tag{1.7а}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1.7б}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0, \tag{1.7в}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho, \tag{1.7г}$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ – вектор напряженности электрического поля, В/м; $\mathbf{H}$ – вектор напряженности магнитного поля, А/м; $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ – вектор электрической индукции, Кл/м^2; $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ – вектор магнитной индукции, Вб/м^2; $\mathbf{J}$ – вектор плотности электрического тока, А/м^2; ρ – объемная плотность электрических зарядов, Кл/м^3.

Основные уравнения электродинамики в интегральной форме для произвольной временной зависимости имеют вид [11–16]

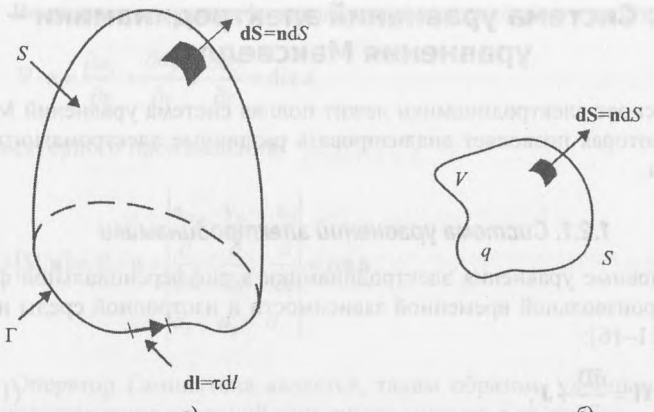
$$\oint_\Gamma\mathbf{H}d\mathbf{l}=\frac{\partial}{\partial t}\int_S\mathbf{D}d\mathbf{s}+\int_S\mathbf{J}d\mathbf{s}, \tag{1.8а}$$

$$\oint_\Gamma\mathbf{E}d\mathbf{l}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_S\mathbf{B}d\mathbf{s}, \tag{1.8б}$$

$$\oint_S\mathbf{B}d\mathbf{s}=0, \tag{1.8в}$$

$$\oint_S\mathbf{D}d\mathbf{s}=\int_V\rho dV, \tag{1.8г}$$

где согласованный выбор контура Γ и поверхности S для формул (1.8а, 1.8б) показан на рис.1.1,*а*; для формул (1.8в, 1.8г) согласование S и V – на рис. 1.1,*б*.



а) *б)*

Рис. 1.1. К уравнениям Максвелла в интегральной форме

Частные случаи электромагнитных полей (электростатических, стационарных и т.п.) вытекают из выражений (1.8). Материальные уравнения объединяются и дополняют приведенные выше уравнения

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a(\omega)\mathbf{E} = \varepsilon_0\varepsilon(\omega)\mathbf{E}, \tag{1.9а}$$

$$\mathbf{B} = \mu_a(\omega)\mathbf{H} = \mu_0\mu(\omega)\mathbf{H}, \tag{1.9б}$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \tag{1.9в}$$

где ε_a, ε и $\varepsilon_0 = 8{,}854\times10^{-12}$ Ф/м – абсолютная, относительная диэлектрические проницаемости среды и вакуума соответственно; μ_a, μ и $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ Гн/м – соответственно абсолютная, относительная магнитные проницаемости среды и вакуума; σ – удельная электрическая проводимость среды, $1/(Ом\cdot м)$.

Из уравнений (1.7), (1.8) следует *закон сохранения заряда* Q, где I – ток, протекающий через замкнутую поверхность S

$$I = \frac{dQ}{dt} \text{ или } \oint_S \mathbf{J}d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV. \tag{1.10а}$$

и *уравнение непрерывности* (дифференциальная формулировка закона сохранения заряда)

$$\nabla\cdot\mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t, \tag{1.10б}$$

из которого вытекает, что силовые линии вектора плотности тока начинаются и заканчиваются в точках, где происходит изменение плотности электрического заряда ρ.

1.2.2. Уравнения электродинамики в комплексной форме

Основные уравнения электродинамики в дифференциальной форме для гармонической временной зависимости $\cos\omega t = \mathrm{Re}\{\exp(i\omega t)\}$ в комплексной форме имеют вид [11–16]

$$\nabla\times\dot{\mathbf{H}} = i\omega\dot{\mathbf{D}} + \dot{\mathbf{J}}, \tag{1.11а}$$

$$\nabla\times\dot{\mathbf{E}} = -i\omega\dot{\mathbf{B}} - \dot{\mathbf{M}}, \tag{1.11б}$$

$$\nabla\cdot\dot{\mathbf{B}} = \dot{\rho}^m, \tag{1.11в}$$

$$\nabla\cdot\dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho}. \tag{1.11г}$$

Здесь $\mathbf{M}$ – вектор плотности магнитного тока, $В/м^2$; $\dot{\rho}^m$ – объемная плотность магнитных зарядов, Вб/м^3; при этом переход от комплексного представления $\dot{\mathbf{E}}$ к действительному $\mathbf{E}$ осуществляется по правилу

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\dot{\mathbf{E}}(x,y,z)\exp(i\omega t)\right]. \tag{1.12}$$

Далее точку, характеризующую комплексное представление, над соответствующими векторами будем опускать. Несмотря на отсутствие в природе магнитных токов и зарядов, их формальное введение часто позволяет значительно упростить расчет векторов электромагнитного поля.

Уравнения (1.11) не содержат в соответствии с (1.9в) возбуждающих (сторонних) источников, создающих электромагнитное поле. Для этого используют следующие векторные величины:

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \sigma\left(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{ст}\right) = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}^{ст},\\ \mathbf{M} &= \sigma^m\left(\mathbf{H}+\mathbf{H}^{ст}\right) = \sigma^m\mathbf{H} + \mathbf{M}^{ст},\end{aligned} \tag{1.13}$$

где σ – удельная электрическая проводимость среды; $\mathbf{E}^{ст}$ – вектор напряженности сторонних электрических сил; $\mathbf{J}^{ст}$ – вектор плотности стороннего электрического тока; σ^m – удельная магнитная проводимость среды, Ом/м; $\mathbf{H}^{ст}$ – вектор напряженности стороннего магнитного поля; $\mathbf{M}^{ст}$ – вектор плотности стороннего магнитного тока, В/м^2.

Подставляя (1.13) в (1.11) и учитывая уравнения непрерывности типа (1.10б)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{J} &= -i\omega\dot{\rho},\\ \nabla\cdot\mathbf{M} &= -i\omega\dot{\rho}^m,\end{aligned} \tag{1.14}$$

равенства (1.11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
&\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}^{\text{ст}}+i\omega\tilde{\varepsilon}_a\mathbf{E},\\
&\nabla\times\mathbf{E}=-\mathbf{M}^{\text{ст}}-i\omega\tilde{\mu}_a\mathbf{H},\\
&\nabla\cdot\left(\tilde{\mu}_a\mathbf{H}\right)=-\left(\nabla\cdot\mathbf{M}^{\text{ст}}\right)\Big/i\omega,\\
&\nabla\cdot\left(\tilde{\varepsilon}_a\mathbf{E}\right)=-\left(\nabla\cdot\mathbf{J}^{\text{ст}}\right)\Big/i\omega.
\end{aligned}\qquad(1.15)$$

где $\tilde{\varepsilon}_a=\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0$, $\tilde{\varepsilon}=\left(\varepsilon-i\sigma/\omega\varepsilon_0\right)$, $\tilde{\mu}_a=\tilde{\mu}\mu_0$, $\tilde{\mu}=\left(\mu-i\sigma^m/\omega\mu_0\right)$ – комплексные относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно (далее знак ~ над ними будем опускать, понимая, что они характеризуют потери).

1.3. Граничные условия. Принцип эквивалентности

При рассмотрении любого реального объекта электродинамики мы встречаемся с двумя типами границ S: границами раздела сред 1–2 (рис. 1.2,*а*) и поверхностями, ограничивающими рассматриваемую область пространства (рис. 1.2,*б*,*в*).

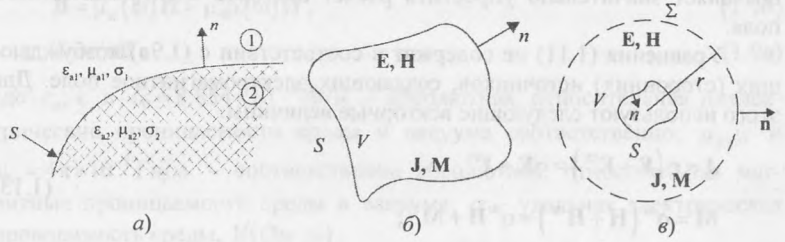


Рис. 1.2. Граничные условия

1.3.1. Граница раздела сред

На границе раздела сред (рис. 1.2,*а*) выполняются граничные условия

$$\begin{aligned}
&\left[\mathbf{n},\left(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2\right)\right]=\mathbf{n}\times\left(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2\right)=-\mathbf{M}_S,\\
&\left[\mathbf{n},\left(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2\right)\right]=\mathbf{n}\times\left(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2\right)=\mathbf{J}_S,\\
&\mathbf{n}\left(\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_2\right)=\rho_S,\\
&\mathbf{n}\left(\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_2\right)=\rho_S^m,
\end{aligned}\qquad(1.16)$$

где индексами 1 и 2 отмечены значения векторов поля в первой и второй средах соответственно; $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности, направленный в первую среду; $\mathbf{J}_S\left[\text{А/м}\right]$, $\rho_S\left[\text{Кл/м}^2\right]$ – вектор плотности поверхностного электрического тока и поверхностная плотность электрических зарядов; $\mathbf{M}_S\left[\text{В/м}\right]$, $\rho_S^m\left[\text{Вб/м}^2\right]$ – вектор плотности поверхностного магнитного тока и поверхностная плотность магнитных зарядов соответственно. Если вторая среда является идеальным проводником, то векторы поля в ней равны нулю.

Помимо естественных граничных условий (1.16) существуют так называемые асимптотические граничные условия, существенно сокращающие вычислительные затраты. Наиболее яркий пример – импедансное граничное условие Леонтовича, позволяющее учесть влияние одной из сред (в нашем случае второй) с большой проводимостью или большой проницаемостью, записывая соотношения, связывающие вектора электромагнитного поля на границе сред.

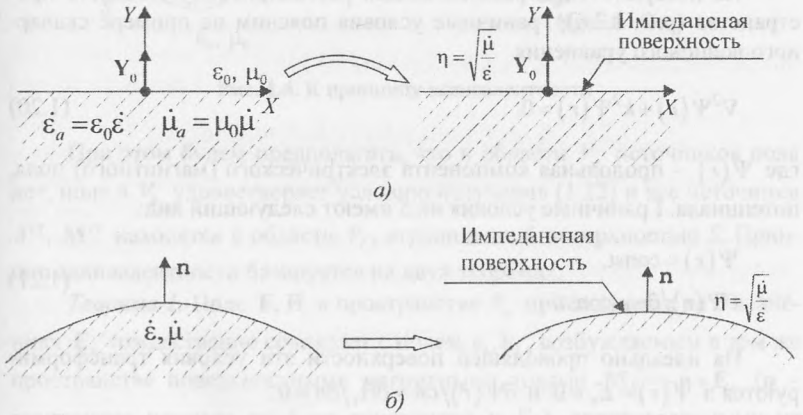


Рис. 1.3. Импедансная поверхность:
а – плоская; *б* – неплоская

В случае плоской границы $y=0$ (рис. 1.3,*а*)

$$E_z=-\eta Z_0 H_x,\quad E_z=-\eta Z_0 H_x,\qquad(1.17)$$

где $\eta=\sqrt{\dot{\mu}_2/\dot{\varepsilon}_2}$ – комплексное относительное сопротивление среды с высоким импедансом ($\dot{\mu}_2,\dot{\varepsilon}_2$ – относительные комплексные магнитная и диэлектрическая проницаемости), $Z_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ – сопротивление сво-

бодного пространства. Объединяя эти два условия для произвольной границы, получим [12, 18, 20]

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{E})=-\eta Z_0(\mathbf{n}\times\mathbf{H}), \tag{1.18}$$

где нормаль $\mathbf{n}$ направлена из второй среды. Условием (1.18) можно пользоваться и для неплоских границ (рис. 1.3,*б*), когда глубина проникновения существенно меньше радиуса кривизны r_i поверхности, что равносильно выполнению условия

$$\left|\mathrm{Im}\left(\sqrt{\dot{\varepsilon}_2\dot{\mu}_2}\right)\right| k_0 r_i \ll 1\ . \tag{1.19}$$

1.3.2. Поверхности, ограничивающие рассматриваемую область пространства

На поверхности, ограничивающей рассматриваемую область пространства (рис. 1.2,*б*), граничные условия поясним на примере скалярного волнового уравнения

$$\nabla^2\Psi(r)+k^2\Psi(r)=0, \tag{1.20}$$

где $\Psi(r)$ – продольная компонента электрического (магнитного) поля, потенциала. Граничные условия на S имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}&\Psi(r)=\mathrm{const},\\ &\partial\Psi(r)/\partial n=\mathrm{const}.\end{aligned} \tag{1.21}$$

На идеально проводящей поверхности эти условия трансформируются в $\Psi(r)=E_\tau=0$ и $\partial\Psi(r)/\partial n=\partial \mathrm{H}_\tau/\partial n=0$.

При рассмотрении внешней задачи электродинамики требуется найти электромагнитное поле в бесконечном пространстве (рис. 1.2,*в*). Тогда для однозначного решения задачи формулируется дополнительное условие на бесконечности (*условие излучения* Зоммерфельда), выделяющее волны, уходящие на бесконечность:

$$\lim_{r\to\infty} r\left[(\partial\Psi_\nu/\partial r)+ik_0\Psi_\nu\right]=0, \tag{1.22}$$

где Ψ_ν – любая составляющая электромагнитного поля, k_0 – постоянная распространения.

1.3.3. Принцип эквивалентности

Этот принцип удобен для расчета электромагнитного поля антенн с излучающим раскрывом, а также для расчета полей в дальней зоне по известным полям в ближней зоне. Задача сводится к определению полей $\mathbf{E},\mathbf{H}$ во внешнем пространстве V_e, ограниченном изнутри замкнутой геометрической поверхностью S (рис. 1.4) по заданным на ней касательным составляющим электрического $\mathbf{E}_\tau$ или магнитного $\mathbf{H}_\tau$ векторов.

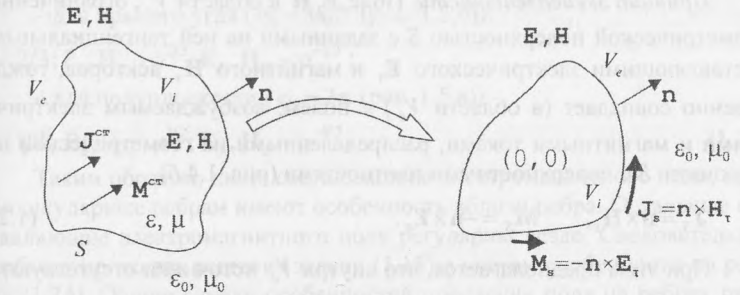


Рис. 1.4. К принципу эквивалентности

При этом будем предполагать, что в области V_e источников поля нет, поле в V_e удовлетворяет условию излучения (1.22) и все источники $\mathbf{J}^{ст}$, $\mathbf{M}^{ст}$ находятся в области V_i, ограниченной поверхностью S. Принцип эквивалентности базируется на двух теоремах.

Теорема 1. Поле $\mathbf{E},\mathbf{H}$ в пространстве V_e при заданных на S значениях $\mathbf{E}_\tau$ тождественно совпадает с полем $\mathbf{e}_1,\mathbf{h}_1$, возбуждаемым в том же пространстве поверхностными магнитными токами $\mathbf{M}_S=-\mathbf{n}\times\mathbf{E}_\tau$ ($\mathbf{n}$ – внутренняя нормаль на S по отношению к V_e), распределенными на внешней стороне поверхности S, которая при этом предполагается имеющей идеальную электрическую проводимость. Последнее означает, что при расчете $\mathbf{e}_1,\mathbf{h}_1$ необходимо также учитывать электрические токи, наводимые на внешней стороне идеально проводящей поверхности S поверхностными магнитными токами $\mathbf{M}_S$, совместным действием которых и будет определяться поле в области V_e.

Теорема 2. Поле $\mathbf{E},\mathbf{H}$ в пространстве V_e при заданных на S значениях $\mathbf{H}_\tau$ тождественно совпадает с полем $\mathbf{e}_2,\mathbf{h}_2$, возбуждаемым в том же пространстве поверхностными электрическими токами $\mathbf{J}_S=\mathbf{n}\times\mathbf{H}_\tau$

($\mathbf{n}$ – внутренняя нормаль на S по отношению к V_e), распределенными на внешней стороне поверхности S, которая при этом предполагается имеющей идеальную магнитную проводимость. Последнее означает, что при расчете $\mathbf{e}_2, \mathbf{h}_2$ необходимо также учитывать электрические токи, наводимые на внешней стороне идеально проводящей поверхности S поверхностными электрическими токами $\mathbf{J}_S$, совместным действием которых и будет определяться поле в области V_e.

Принцип эквивалентности. Поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ в области V_e, ограниченной геометрической поверхностью S с заданными на ней тангенциальными составляющими электрического $\mathbf{E}_\tau$ и магнитного $\mathbf{H}_\tau$ векторов, тождественно совпадает (в области V_e) с полем, возбуждаемым электрическими и магнитными токами, распределенными на геометрической поверхности S с поверхностными плотностями (рис. 1.4,*б*)

$$\mathbf{J}_S = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_\tau, \qquad \mathbf{M}_S = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_\tau. \tag{1.23}$$

При этом предполагается, что внутри V_e источники отсутствуют, а $\mathbf{n}$ – внутренняя нормаль на S по отношению к V_e.

1.3.4. Об особенностях поведения полей

Наличие ребер на граничных поверхностях приводит к неоднозначному решению уравнений Максвелла, из которых только одно наиболее адекватно описывает исследуемое явление. В качестве конкретного примера рассмотрим двумерный идеально проводящий клин, изображенный на рис. 1.5,*а*.

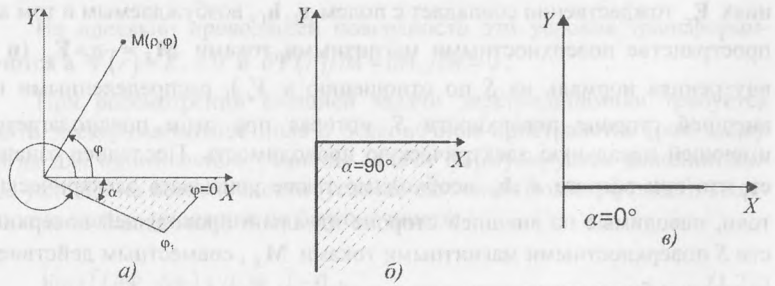


Рис. 1.5. Условия на ребрах

Ребра клина окружены однородной средой с параметрами ε_a, μ_a, а значения угла клина φ_1 находится в интервале $0 \le \varphi_1 \le 2\pi$. Для обеспе-

чения единственности решения необходимо ввести некоторое дополнительное физическое ограничение на поля, известное как *условие на ребре.* Оно заключается в требовании конечности энергии электромагнитного поля в малом объеме в окрестности ребер. Из этого условия следует, что в окрестности ребра ни одна составляющая электромагнитного поля $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ не может возрастать быстрее, чем $\rho^{-1+\delta}$, при $\rho \to 0$ ($0 < \delta < 1$, ρ – расстояние до ребра). В частности, для металлического клина при $\rho \to 0$:

– для прямого угла ($\varphi_1 = 3\pi/2$ (рис. 1.5,*б*)):

$\delta = 2/3;\ E_z, H_z \sim \rho^{2/3};\ \mathbf{E}_\perp, \mathbf{H}_\perp \sim \rho^{-1/3}$;

– для полуплоскости ($\varphi_1 = 2\pi$ (рис. 1.5,*в*)):

$$\delta = 1/2;\ E_z, H_z \sim \rho^{1/2};\ \mathbf{E}_\perp, \mathbf{H}_\perp \sim \rho^{-1/2}; \tag{1.24}$$

Таким образом, лишь составляющие электромагнитного поля, перпендикулярные ребрам имеют особенность вблизи ребра. Остальные составляющие электромагнитного поля регулярны везде. Следовательно, необходимо искать решение задачи (1.15) с учетом особенности на ребрах (1.24). Общие случаи особенностей поведения поля на ребрах приведены в работах [16, 17, 21].

1.4. Дифференциальные уравнения электродинамики

Уравнения (1.7), (1.9), (1.11), (1.13), (1.15) позволяют классифицировать электромагнитные процессы и получить ряд соотношений, используемых в следующих главах для иллюстрации и тестирования численных методов на простейших примерах.

1.4.1. Уравнения электростатики

Самыми простыми являются неизменные во времени поля при отсутствии токов, т.е. $\partial/\partial t = 0$, $\mathbf{J} = 0$, а уравнения для электрического поля, называемого *электростатическим,* принимают вид

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}. \tag{1.25}$$

Используя тождество $\nabla \times (\nabla u) = 0$, вводят понятие скалярного потенциала электростатического поля

$$\mathbf{E} = -\nabla u, \tag{1.26}$$

и, подставив во второе уравнение (1.25), получаем в случае однородной среды для скалярного потенциала *уравнение Пуассона*

$$\nabla^2 u = \rho/\varepsilon_a . \qquad (1.27)$$

Общий вид решения этого уравнения Пуассона для неограниченной области имеет вид

$$\mathrm{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}V', \qquad (1.28)$$

где $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ – радиус-вектор точек наблюдения и интегрирования соответственно. Для тех областей, где заряд отсутствует ($\rho = 0$) равенства (1.27) переходит в *уравнение Лапласа*

$$\nabla^2 u = 0 . \qquad (1.29)$$

Граничные условия (1.16) с учетом выражения (1.26) для потенциалов в первой u_1 и второй сред u_2 выглядят как

$$\mathrm{u}_1 = \mathrm{u}_2, \quad -\varepsilon_{a1}\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{n}} + \varepsilon_{a2}\frac{\partial u_2}{\partial \mathrm{n}} = \rho_S . \qquad (1.30)$$

Граничные условия для электростатического потенциала на поверхности S проводника имеют вид

$$\mathrm{u}\big|_S = \mathrm{const}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}\right|_S = -\rho_S/\varepsilon_{a1}, \qquad (1.31)$$

где нормаль $\mathbf{n}$ – внешняя по отношению к проводящей среде. При наличии совокупности проводящих тел S_i распределение $\rho(\mathbf{r}')$ на каждом из них неизвестно и краевые задачи формулируются как задача Дирихле

$$\nabla^2 u = 0, \qquad u = \Phi_i \quad на\ \mathrm{S_i}, \qquad (1.32)$$

или как задача Неймана, в которой вместо граничных условий для потенциалов Φ_i задаются граничные условия типа (1.31).

Для линейных сред в силу линейности уравнений электростатики вводится понятие емкости C [Ф] системы проводников. В частном случае двух проводников с зарядом q и потенциалами u_1 и u_2

$$C = q/|u_1 - u_2| . \qquad (1.33)$$

Энергия электростатического поля определяется общим соотношением [12]

$$W^{\text{э}} = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{D}\mathbf{E}\mathrm{d}V, \qquad (1.34)$$

или в более удобной форме для локального распределения зарядов

$$W^{\text{э}} = \frac{1}{2}\int_V \rho u \mathrm{d}V. \qquad (1.35)$$

1.4.2. Стационарное поле

Если электромагнитное поле неизменно во времени, то система уравнений Максвелла разбивается на две группы. Первая, характеризующая электрическое поле, совпадает по форме с выражениями (1.25). Вторая принимает вид

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}. \qquad (1.36)$$

Связующим звеном между двумя группами является материальное уравнение (1.13) – $\mathbf{J} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ст}}\right) = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}^{\text{ст}}$.

Стационарное магнитное поле логично находить, используя векторный потенциал $\mathbf{A}$ как частный случай [см. ниже формулы (1.47), (1.49)] при $\partial/\partial t \to i\omega = 0$:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_a \mathbf{J}^{\text{ст}}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a}\nabla \times \mathbf{A}. \qquad (1.37)$$

Для линейных сред в силу линейности уравнений (1.36) вводится понятие индуктивности L [Гн], связывающим поток $\Phi = \int_S \mathbf{B}\mathbf{d}\mathbf{s}$, пронизывающий контур с током, в этом контуре

$$\Phi = LI. \qquad (1.38)$$

Энергия стационарного магнитного поля определяется общим соотношением [12]

$$W^{\text{м}} = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{B}\mathbf{H}\mathrm{d}V, \qquad (1.39)$$

или в более удобной форме для локального распределения токов

$$W^{\text{э}} = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{J}\mathbf{A}\mathrm{d}V. \qquad (1.40)$$

1.4.3. Квазистационарное электромагнитное поле

Квазистационарными называются *поля*, которые, будучи переменными, тем не менее сохраняют в своей структуре основные черты стационарных. Можно представить себе столь медленное изменение поля во времени, что оно не вызывает заметного перераспределения поля в пространстве. Иными словами, при временной зависимости токов $f(t)$ поля $\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ имеют вид $f(t)\mathbf{E}(\mathbf{r}), f(t)\mathbf{H}(\mathbf{r})$ и, следовательно, в каждый момент времени t сохраняют структуру стационарного поля, изменяясь только по величине. Формально уравнения Максвелла, описывающие такие поля, следуют из общих уравнений с пренебрежением токами смещения $\partial\mathbf{D}/\partial t$ по сравнения с токами проводимости $\mathbf{J}$. Удобным критерием квазистационарного поля является максимальный размер объекта

$$D \ll \lambda, \tag{1.41}$$

где λ – длина волны.

Особенностью теории квазистационарных процессов является использование уравнений Максвелла в интегральной форме вместе с такими понятиями, как индуктивность и емкость, происходящими из теории стационарных и статических полей. Это позволяет записать основное уравнение теории цепей переменного тока (рис. 1.6) в виде сосредоточенных индуктивности L, емкости C, сопротивления R и э.д.с. $\mathcal{Э}^{ст}$

$$L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{Э}^{ст}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.42}$$

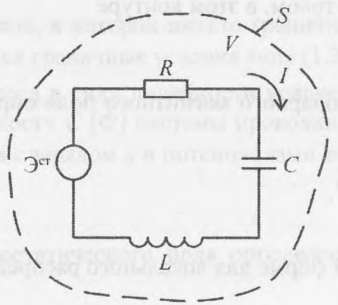


Рис. 1.6. Квазистационарная цепь

1.4.4. Волновые уравнения для векторов поля и электродинамических потенциалов

Решая уравнения (1.15) с заданными сторонними источниками и соответствующими граничными условиями, можно найти векторы электромагнитного поля. Однако часто более удобным оказывается иной подход. Из системы уравнений (1.15) исключают все неизвестные величины, кроме напряженностей поля, а затем $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$. В конечном счете получают дифференциальные уравнения второго порядка относительно одного из векторов.

Рассмотрим простейшую ситуацию, когда сторонние магнитные источники отсутствуют ($\mathbf{M}^{cm} = 0, \rho^m = 0$), среда является линейной, однородной, изотропной, характеризуемой ε_a, μ_a с $\sigma = 0$, $\sigma^m = 0$. Взяв ротор от обеих частей второго уравнения (1.15), исключив вектор $\mathbf{H}$, используя первое уравнение и векторное тождество (1.6а), приходим к уравнению [11–19]:

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = i\omega\mu_a\mathbf{J}^{ст} + \frac{i}{\omega\varepsilon_a}\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{J}^{ст}\right), \tag{1.43}$$

где $k = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$ – волновое число (постоянная распространения). Выполняя такие же операции с первым уравнением (1.15), получим

$$\nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = -\nabla\times\mathbf{J}^{ст}. \tag{1.44}$$

Для тех точек пространства, в которых $\mathbf{J}^{ст} = 0$, равенства (1.43), (1.44) переходят в однородные уравнения Гельмгольца

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} &= 0,\\ \nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} &= 0.\end{aligned} \tag{1.45}$$

Если при заданных условиях применить изложенные выше процедуры к уравнениям (1.7) для произвольной временной зависимости при $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}^{ст}$, то получим волновые уравнения, аналогичные (1.43), (1.44):

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{E} - \varepsilon_a\mu_a\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} &= \mu_a\frac{\partial\mathbf{J}^{ст}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_a}\nabla\rho^{ст},\\ \nabla^2\mathbf{H} - \varepsilon_a\mu_a\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} &= -\nabla\times\mathbf{J}^{ст}.\end{aligned} \tag{1.46}$$

Неудобство волновых уравнений (1.43), (1.44) для векторов поля во многих случаях заключается в сложности выражений в правой

части этих уравнений. Поэтому оказывается целесообразным введение векторного **A** и скалярного u электродинамических потенциалов, удовлетворяющих следующим неоднородным уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=-\mathbf{J}^{\text{ст}},$$
$$\nabla^2 \mathrm{u}+k^2\,\mathrm{u}=-\frac{i}{\omega\varepsilon_a}\nabla\mathbf{J}^{\text{ст}}, \tag{1.47}$$

связанных уравнением калибровки $i\omega\varepsilon_a\mu_a\,\mathrm{u}+\nabla\cdot\mathbf{A}=0$.

При этом векторы электромагнитного поля находятся по следующим формулам:

$$\mathbf{E}=-\frac{i}{\omega\varepsilon_a}\left[\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right)+\omega^2\varepsilon_a\mu_a\mathbf{A}\right],$$
$$\mathbf{H}=\nabla\times\mathbf{A}, \tag{1.48}$$

где для $\mathbf{J}^{\text{ст}}$, сосредоточенного в объеме V в неограниченной среде

$$\mathbf{A}=\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\mathbf{J}^{\text{ст}}\left(x',y',z'\right)}{r}\mathrm{e}^{-ikr}\mathrm{d}V'. \tag{1.49}$$

Если же при заданных условиях источником возбуждения являются магнитные токи $\mathbf{J}^{\text{ст}}=0$, $\mathbf{M}^{\text{ст}}\neq 0$, то вводится векторный **F** и скалярный $u^{\text{м}}$ магнитные электродинамические потенциалы. При этом формулы (1.47–1.49) легко трансформируются с использованием принципа двойственности: $\mathbf{J}^{\text{ст}}\to-\mathbf{M}^{\text{ст}}$, $\varepsilon_a\to-\mu_a$, $H\to E$, $E\to H$.

1.4.5. Волновые уравнения для векторов поля в линиях передачи

Передача электромагнитной энергии осуществляется с помощью передающих линий самых различных типов, некоторые из которых представлены на рис. 1.7. В однородных вдоль продольной оси Z линиях передачи векторы электромагнитного поля для гармонической временной зависимости, записанные в виде бегущей в положительном направлении оси Z волны, имеют вид

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}(x,y)\exp i\left(\omega t-\gamma z\right),\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}(x,y)\exp i\left(\omega t-\gamma z\right), \tag{1.50}$$

где γ – постоянная распространения.

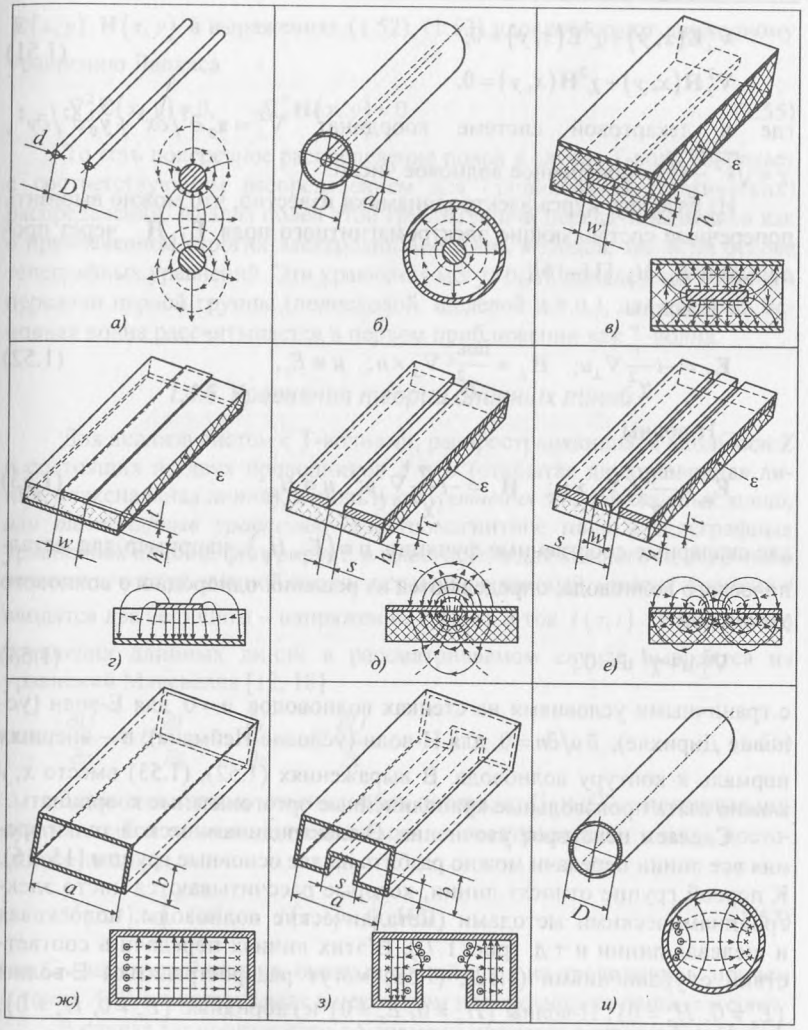


Рис. 1.7. Некоторые линии передачи:
а – двухпроводная; *б* – коаксиальная; *в* – симметричная полосковая; *г* – микрополосковая; *д* – щелевая; *е* – компланарная; *ж* – прямоугольный металлический волновод; *з* – П-образный металлический волновод; *и* – круглый металлический волновод

Подстановка выражений (1.50) в (1.45) приводит к двумерным уравнениям

$$\nabla_\perp^2 \mathbf{E}(x,y)+\chi^2\mathbf{E}(x,y)=0,$$
$$\nabla_\perp^2 \mathbf{H}(x,y)+\chi^2\mathbf{H}(x,y)=0, \qquad (1.51)$$

где в декартовой системе координат $\nabla_\perp^2 = \mathbf{x_0}\,\partial^2/\partial x^2 + \mathbf{y_0}\,\partial^2/\partial y^2$, $\chi=\sqrt{k^2-\gamma^2}$ – поперечное волновое число.

Из базового курса электродинамики известно, что можно выразить поперечные составляющие электромагнитного поля $\mathbf{E}_\perp, \mathbf{H}_\perp$ через продольные E_z, H_z [11–16]:

– Е-волны

$$\mathbf{E}_\perp = -i\frac{\gamma}{\chi^2}\nabla_\perp u; \quad \mathbf{H}_\perp = \frac{i\omega\varepsilon_a}{\chi^2}\nabla_\perp \times u; \quad u \equiv E_z, \qquad (1.52)$$

– Н-волны

$$\mathbf{E}_\perp = \frac{i\omega\mu_a}{\chi^2}\nabla_\perp \times u; \quad \mathbf{H}_\perp = -i\frac{\gamma}{\chi^2}\nabla_\perp u; \quad u \equiv H_z. \qquad (1.53)$$

где скалярные собственные функции $\mathrm{u} \equiv (E_z, H_z)$, например для металлического волновода, определяются из решения однородного волнового уравнения

$$\nabla_\perp^2 \mathrm{u} + \chi^2 \mathrm{u} = 0, \qquad (1.54)$$

с граничными условиями на стенках волноводов $\mathrm{u}=0$ для Е-волн (условие Дирихле), $\partial \mathrm{u}/\partial n = 0$ для Н-волн (условие Неймана), $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к контуру волновода. В выражениях (1.52), (1.53) вместо x, y можно взять произвольные криволинейные ортогональные координаты.

Сделаем некоторое уточнение. С электродинамической точки зрения все линии передачи можно разбить на две основные группы [15, 16]. К первой группе относят линии, которые рассчитываются чисто электродинамическими методами (металлические волноводы, полосковая и щелевая линии и т.д. (рис. 1.7)). В этих линиях передачи в соответствии с уравнениями (1.52), (1.53) могут распространяться Е-волны $(E_z \neq 0,\ H_z = 0)$, Н-волны $(H_z \neq 0,\ E_z = 0)$ и гибридные $(E_z \neq 0,\ H_z \neq 0)$, классификация которых может быть далее продолжена. Анализ полей этой группы линий передачи требует привлечения строгих электродинамических методов.

Ко второй группе относятся линии передачи, имеющие две и более проводящие поверхности (двухпроводная линия, коаксиальный кабель, экранированная двухпроводная линия и т.д. (рис. 1.7)), в которых могут распространяться Т-волны, для которых $(E_z = 0,\ H_z = 0)$, $\chi^2 = 0$, $\gamma = k$. Из равенств (1.45) следует, что функции поперечных координат

$\mathbf{E}(x,y), \mathbf{H}(x,y)$ в выражениях (1.52), (1.53) удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа

$$\nabla_\perp^2 \mathbf{E}(x,y) = 0, \qquad \nabla_\perp^2 \mathbf{H}(x,y) = 0. \qquad (1.55)$$

То есть поперечное распределение полей в случае Т-волн совпадает с соответствующим распределением для стационарных (статических) распределений. Анализ полей этой группы линий передачи возможен как с привлечением строгих электродинамических методов, так и на основе телеграфных уравнений. Эти уравнения могут быть привлечены к линиям передачи первой группы (полосковой, щелевой и т.п.), для которых основная волна рассчитывается в первом приближении как Т-волна.

1.4.6. Уравнения теории длинных линий

Для анализа систем с Т-волнами, распространяющихся вдоль оси Z и состоящих из двух проводников A и B (открытая двухпроводная линия, коаксиальная линия), используют *уравнения теории длинных линий, или телеграфные уравнения.* Электромагнитное поле в телеграфных уравнениях явно не фигурирует, а вместо него для каждого поперечного сечения $z = \mathrm{const}$ данной линии передачи в каждый момент времени t вводятся две величины – напряжение $U(z,t)$ и ток $I(z,t)$. Заметим, что уравнения длинных линий в рассматриваемом случае выводятся из уравнений Максвелла [12, 18]

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -L'\frac{\partial I}{\partial t}, \qquad \frac{\partial I}{\partial z} = -C'\frac{\partial U}{\partial t}. \qquad (1.56)$$

Здесь полагается, что линия без потерь, а L' и C' – погонные индуктивность и емкость, определяемые из электростатики и поля постоянного тока как

$$U(z,t) = \int_A^B \mathbf{E}\mathbf{dl}, \qquad I(z,t) = \oint_\Gamma \mathbf{H}\mathbf{dl}, \qquad (1.57)$$

где Г – замкнутый контур, охватывающий один из проводников, причем и точки A, B, и контур лежат в некотором поперечном сечении $z = \mathrm{const}$.

В случае гармонического во времени процесса векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ подчинены волновому закону и, следовательно, то же самое можно сказать о напряжении и токе, так что в комплексной форме $\dot{U} = \dot{U}_m \exp i(\omega t - kz)$ и $\dot{I} = \dot{I}_m \exp i(\omega t - kz)$. Внося это в уравнения (1.56), получаем:

$$k\dot{U}_m = \omega L'\dot{I}_m, \quad k\dot{I}_m = \omega C'\dot{U}_m. \qquad (1.58)$$

Откуда для постоянной распространения k и характеристического сопротивления Z

$$k=\omega/\upsilon=\omega\sqrt{L'C'},\quad \upsilon=1/\sqrt{L'C'};\quad Z=\dot{U}_m/\dot{I}_m=\sqrt{L'/C'},\qquad (1.59)$$

причем сопротивление Z можно определить, зная поле, при помощи интегральных представлений (1.57) напряжения и тока.

Пределы применимости рассмотренных уравнений устанавливаются отдельно для каждой из линий передачи. В частности, для двухпроводной линии передачи (рис. 1.7,*а*) это условие имеет вид $k_0 b \ll 1$; для коаксиальной линии (рис. 1.7,*б*) – $k_0\sqrt{\varepsilon\mu}\,b \ll 1$; для несимметричной микрополосковой (рис. 1.7,*г*) и щелевой (рис. 1.7,*д*) линий – $a<\Lambda/2, h<\Lambda/2$, где Λ – длина Т-волны в линии передачи с учетом эффективной диэлектрической проницаемости; и т.д.

1.5. Фазовая скорость, дисперсия, групповая скорость

Пусть плоская волна распространяется в положительном направлении оси X, а вектор **E** ориентирован по оси Y. Тогда в соответствии с равенствами (1.46) составляющая E_y является решением волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \mathrm{E}_y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{E}_y}{\partial t^2}. \qquad (1.60)$$

В случае гармонической временной зависимости (1.12) решение (1.60) имеет вид

$$E_y(x,t)=E_0 \mathrm{e}^{i(\omega t-\beta x)}. \qquad (1.61)$$

Подставляя это решение в уравнение (1.60), получаем для волнового числа в свободном пространстве (постоянной распространения)

$$\beta=\pm\omega/c. \qquad (1.62)$$

Фазовая скорость волны определяется как скорость, с которой перемещается точка с постоянной фазой. Пусть плоский фазовый фронт волны в момент времени $t=t_0$ совпадает с плоскостью $x=x_0$, как показано на рис. 1.8,*а* фаза равна $\Phi=\omega t_0-\beta x_0$. В следующий момент времени $t=t_0+\Delta t$ этот фронт волны сместится в положение $x=x_0+\Delta x$, т.е. $\Phi=\omega(t_0+\Delta t)-\beta(x_0+\Delta x)$. Из этих двух соотношений для Φ имеем $\omega\Delta t=\beta\Delta x$, откуда получаем выражение для *фазовой скорости*

$$\upsilon_\phi=\Delta x/\Delta t=\omega/\beta=c. \qquad (1.63)$$

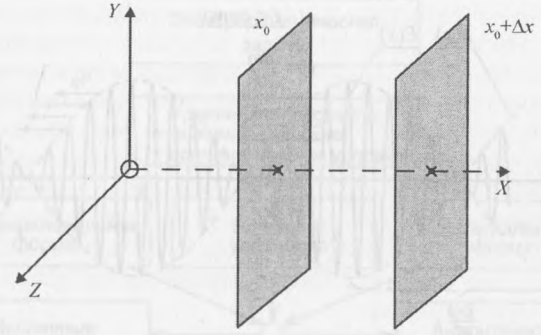


Рис. 1.8. Плоская волна

Фазовая скорость, как видно, не зависит от частоты. Если же такая зависимость есть (например, в металлических волноводах, средах с потерями), то при распространении сигнала с конечной полосой частот фазовая скорость не определена и вводится понятие групповой скорости. Для характеристики групповой скорости рассмотрим распространение двух гармонических сигналов в дисперсионной среде

$$E_y(x,t)=E_0 e^{i\left[(\omega-\Delta\omega)t-(\beta-\Delta\beta)x\right]}+E_0 e^{i\left[(\omega+\Delta\omega)t-(\beta+\Delta\beta)x\right]} \text{ или}$$

$$E_y(x,t)=2E_0 e^{i(\omega t-\beta x)}\cos(\Delta\omega t-\Delta\beta x), \qquad (1.64)$$

где $\beta\pm\Delta\beta$ – фазовая константа на частоте $\omega\pm\Delta\omega$.

Сигнал (1.64) представлен в виде произведения двух сомножителей – несущей $E(x)$ и огибающей $S(x)$, что отражено на рис. 1.9. Скорость распространения огибающей $S(x,t)=\cos(\Delta\omega t-\Delta\beta x)$ по аналогии с (1.63) равна $\Delta\omega/\Delta\beta$. В пределе $\Delta\omega\to 0$, $\Delta\beta\to 0$ эта скорость распространения огибающей, называемая *групповой*, равна

$$\upsilon_{\text{гр}}=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\beta=1/\mathrm{d}\beta/\mathrm{d}\omega \qquad (1.65)$$

так, что для плоской Т-волны (1.61) в соответствии с (1.62) $\upsilon_{\text{гр}}=\pm c$ и совпадает со скоростью распространения энергии, определяемой вектором Пойнтинга

$$\mathbf{\Pi}=1/2\,\mathrm{Re}\left[\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^*\right]=\mathbf{z}_0\mathrm{E}_0^2\cos^2(\Delta\omega t-\Delta\beta x)/Z_0, \qquad (1.66)$$

где $Z_0=120\pi$ [Ом]; $*$ – знак сопряжения.

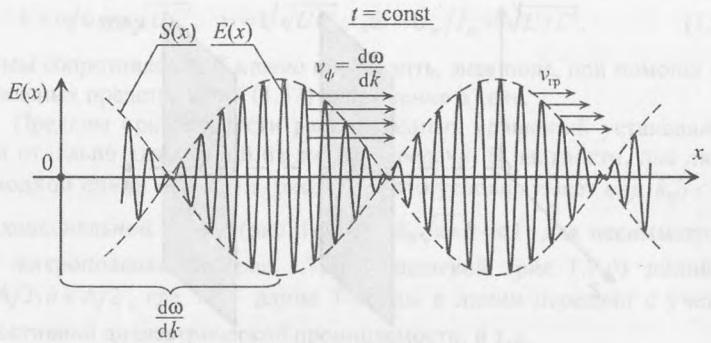


Рис. 1.9. К понятию групповой скорости

Если же коэффициент фазы обладает дисперсией, например, при распространении волны в металлическом волноводе – $\beta = \sqrt{\omega^2 c^2 - \chi^2}$, тогда

$$\upsilon_\phi = \omega/\beta\,,\ \upsilon_{гр} = c^2\beta/\omega \text{ и } \upsilon_\phi \upsilon_{гр} = c^2\,. \qquad (1.67)$$

1.6. Численные и аналитические методы решения задач электродинамики

Решение любой электродинамической задачи основывается на решении уравнений электродинамики (или эквивалентных соотношений) с граничными условиями, условиями на бесконечности (для внешних задач) и дополнительными требованиями, учитывающими сингулярность решения. Достаточно условная классификация аналитических и численных методов представлена на рис. 1.10 [21]. Аналитические методы наглядны, как правило, более просты и экономны при реализации, однако их применение достаточно ограничено. Численные методы позволяют решать задачи для сложных областей (объектов), неоднородных и анизотропных сред, анализировать процессы в широкой полосе частот, однако они требуют существенных вычислительных затрат.

Выделим основные численные методы решения электродинамических задач. Проекционные методы: ММ и Ритца; МКР (FDM); МКРВО (FDTD) и МКЭ (FEM).

Сильной стороной ММ является: удобство моделирования рассеяния на металлических телах, поскольку анализ сводится к решению поверхностных интегральных уравнений и не требуется дискретизация области решения вне тел. Метод идеально подходит для моделирования проволочных антенн при одномерной (двумерной) дискретизации. Метод



Рис. 1.10. Классификация аналитических и численных методов

эффективен для СВЧ-устройств и антенн, содержащих плоскослоистые диэлектрические структуры, таких как печатные или диэлектрические резонаторные антенны, поскольку диэлектрические слои могут быть учтены специальными функциями Грина. ММ автоматически (через функции Грина) учитывает условия излучения, т.е. убывание поля в дальней зоне, что чрезвычайно важно при решении задач излучения или рассеяния. После нахождения токов на объектах моделирования основные характеристики (например, эффективная поверхность рассеяния, входное сопротивление антенн, диаграмма направленности, коэффициент усиления) определяются непосредственно или в результате прямого численного интегрирования.

Слабая сторона ММ суммируется к следующему: возможности метода существенно ограничены при моделировании антенн и СВЧ-устройств со сложной конструкцией, включающей анизотропные и неоднородные среды, поскольку ММ не обладает гибкостью сеточных методов. Трудоемкая алгоритмическая подготовка и существенные вычислительные затраты требуют большого объема расчетного машинного времени при анализе больших структур (особенно антенных решеток), содержащих миллионы неизвестных величин.

МКР базируется на решении дифференциальных уравнений в частных производных, представленных в конечно-разностной форме. Метод достаточно универсальный, требует минимальной аналитической подготовки и легко программируем, однако для его реализации необходимо обращение матричных уравнений большого порядка. МКР создает промежуточную базу для МКРВО.

МКРВО достаточно прост при формулировке, сеточной дискретизации и реализации, легко учитывает анизотропные и неоднородные материалы. Эффективность метода обусловлена отсутствием матричных уравнений и возможностью за один проход с помощью Фурье-преобразования проанализировать характеристики в полосе частот.

Математическая суть *МКЭ* кратко может быть выражена так: это проекционный метод со специальными координатными функциями. МКЭ обладает следующими достоинствами для анализа в частотной области сложных СВЧ и антенных конструкций: алгоритмическая простота, универсальность, естественный учет неоднородных, анизотропных и дисперсионных сред. Общее решение уравнений электродинамики при анализе устройств, реализуемое на основе МКЭ, базируется на прямых проекционных (вариационных) методах Ритца, Галеркина или взвешенных невязок и сводит задачу к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженными матрицами.

При решении электродинамических задач с использованием численных методов можно выделить *ряд этапов*. На первом этапе на основе уравнений Максвелла формируется основное уравнение метода. ММ

с успехом используется при решении интегральных уравнений. В МКРВО уравнения Максвелла представляются в конечно-разностной форме в пространстве и времени; уравнения Максвелла или волновые используются в МКЭ для вариационной формулировки или в форме взвешенных невязок и т.п. На втором этапе осуществляется дискретизация области (выбор базисных функций) на пространственные ячейки выбранной формы и размеров, в результате решение задачи сводится к системе линейных уравнений. Последующие этапы связаны с решением матричных уравнений и постобработкой, например для расчета S-параметров, диаграммы направленности и т.п.

— ГЛАВА 2 —

Проекционные методы решения электродинамических задач

При решении краевых задач электродинамики широко используются два классических проекционных метода: ММ и Ритца. Метод моментов стартует с дифференциальных уравнений, а метод Ритца – с вариационной формулировки задачи, каждый из них имеет свои достоинства и недостатки.

2.1. Ортогональные системы функций и ортогональные ряды

Важным моментом при решении проекционными методами является способ представления электромагнитного поля, центральным моментом которого являются понятия об ортогональных системах функций и ортогональных рядах. Некоторые необходимые сведения из функционального анализа приведены в Приложении 1.

2.1.1. Основные свойства

Две функции u и v называются ортогональными, если

$$(u,v)=\int_V \sigma u v^* \,\mathrm{d}V=0, \qquad (2.1)$$

где (u,v) – обозначение скалярного произведения функций; V – пространственная область задачи (при переходе к двумерным и одномерным задачам V заменяется на S и L соответственно); $*$) – знак комплексного сопряжения, а $\sigma(q)$– неотрицательная весовая функция, в частном случае равная единице. С понятием скалярного произведения функций связано понятие нормы функции:

$$\|\mathrm{u}\|=\sqrt{(\mathrm{u},\mathrm{u}^*)}. \qquad (2.2)$$

Приведем, основываясь на традиционном курсе электродинамики, пример собственных функций, сформулировав следующие утверждения, доказательства которых приведены, например, в [1, 2, 12].

1. Решение краевой (граничной) задачи для уравнения Гельмгольца (1.54) с граничными условиями на стенках прямоугольного металлического волновода $\mathrm{u}=0$ для Е-волн (условие Дирихле), $\partial \mathrm{u}/\partial n=0$ для Н-волн (условие Неймана) порождает систему так называемых собственных функций $\mathrm{u}=\mathrm{u}_i$ ($i=1, 2, ...$), ортогональных в смысле выражения (2.1). Вводя, например, в (1.54) обозначения $\mathbf{L}=-\nabla_\perp^2$ (двумерный оператор Лапласа), приходим к задаче на собственные значения χ^2 оператора $\mathbf{L}$ ($\mathbf{L}u=\chi^2 u$).

2. Собственные значения χ^2 неотрицательные и могут быть расположены в следующем порядке: $0\le\chi_1^2\le\chi_2^2\le...\chi_i\le...$.

Ортогональная система функций всегда может быть нормирована, т.е. можно так подобрать постоянные коэффициенты в выражениях $\mathbf{u}_i$, что выполняется условие $(\mathrm{u}_i,\mathrm{u}_k)=\delta_{ik}$, где $\delta_{ik}=0$ при $i\ne k$ и $\delta_{ik}=1$ при $i=k$ (символ Кронекера). Убедимся в сказанном на примере собственных функций, полученных при решении отмеченной выше задачи для Е-волн с граничными условиями на стенках волноводов $u=E_z=0$. В соответствии с [12] $E_z=u_i=E_i\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$, $\chi_{mn}^2=(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2$, $m=1, 2, ...$, $n=1, 2, ...$ Тогда ортогональные нормированные собственные функции имеют вид $\mathrm{u}_i=\mathrm{u}_{mn}=N_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$, где $N_{mn}=2/\sqrt{ab}$. Действительно, в соответствии с равенством (2.1)

$$(\mathrm{u}_{mn},\mathrm{u}_{pq})=\int_0^a\int_0^b N_{mn}N_{pq}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{p\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{q\pi y}{b}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\delta_{ik}. \qquad (2.3)$$

Возьмем далее ортонормированную систему $\{\mathbf{u}_n\}$ и некоторую функцию f, определенную в той же области, и построим ряд

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}a_n u_n,\quad a_n=(f,u_n). \qquad (2.4)$$

Этот ряд называется *ортогональным рядом* или *рядом Фурье* функции f, а a_n – *коэффициентами Фурье*. Отличительным свойством ряда Фурье является выполнение равенства

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, u_k\right) = (f, u_k) = a_k \qquad (2.5)$$

для всех k. Действительно, при составлении скалярного произведения с u_k справа в выражении (2.5) в силу ортонормировки получаем нуль во всех членах за исключением k-го, который дает a_k. Ряд Фурье (2.4) *сходится в среднем* к f, т.е.

$$\left(f - \sum_{n=1}^{N} a_n u_n, f - \sum_{n=1}^{N} a_n u_n\right) \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty, \qquad (2.6)$$

если система $\{\mathbf{u}_n\}$ обладает, как говорят, свойством *полноты*(+) (Приложение 1), т.е. при увеличении числа функций u_n условие (2.6) выполняется сколь угодно точно. В частности, рассматриваемая нами система собственных функций оператора Лапласа обладает свойством полноты.

Понимание сущности разложения Фурье хорошо интерпретируется, если трактовать функцию f как вектор в бесконечномерном пространстве, а ее ряд Фурье (2.4) как разложение, подобное разложению обычного вектора по трем координатным осям декартовой системы координат.

При решении многих электродинамических задач искомое электромагнитное поле **E,H** представляют в виде разложения по некоторым системам функций $\{\mathbf{E}_n\}_{n=1}^{N}$, $\{\mathbf{H}_n\}_{n=1}^{N}$, в общем случае не обязательно удовлетворяющим уравнениям Максвелла

$$\mathbf{E}^N = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbf{E}_n, \qquad \mathbf{H}^N = \sum_{n=1}^{N} b_n \mathbf{H}_n, \qquad (2.7)$$

где a_n, b_n – неизвестные коэффициенты.

Таким образом, решение электродинамической задачи, соответствующей устройству СВЧ, сводится к определению постоянных коэффициентов $\{a_n\}_{n=1}^{N}$, $\{b_n\}_{n=1}^{N}$, для нахождения которых необходимо построить соответствующую систему линейных алгебраических уравнений. Разница между проекционными методами состоит в том, каким образом задача сводится к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных a_n, b_n.

2.1.2 Скалярное одномерное дифференциальное уравнение Штурма–Лиувилля

Решение операторных уравнений, как правило, излагается в терминах функционального анализа [22, 23]. Однако за абстрактность изложения приходится расплачиваться наглядностью представлений. Рассмотрение понятий собственных функций и собственных значений для одномерного дифференциального уравнения Штурма–Лиувилля (ШЛ), записанного ниже, позволяет соединить абстрактность и наглядность представлений [21, 24]:

$$\mathbf{L}(y) + \lambda \eta(x) y(x) = 0, \quad 0 \le x \le a, \qquad (2.8)$$

где $\mathbf{L}(y) = \left[p(x)y'(x)\right]' - q(x)y(x)$ – дифференциальный оператор; $y(x)$ – собственная функция оператора **L**; λ – собственное значение; $\eta(x) \ge 0$ – весовая функция; знак $(') \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}x$.

Задавая разные значения коэффициентов (функций) и граничные условия, можно сформулировать различные одномерные краевые задачи, соответствующие электродинамическим задачам (распространение волны между параллельными металлическими пластинами, отражение плоской волны от металлической плоскости, покрытой диэлектриком и т.д.). Полагая $y(x) = u(x)$, $p(x) = 1$, $-q(x) = k^2$, $\eta(x) = -1$ и задавая нулевые условия на границах области, записываем конкретное уравнение (2.8) для нахождения собственных функций u_n и значений λ_n

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + k^2 u_n = \lambda_n u_n, \quad u_n(0) = u_n(a) = 0. \qquad (2.9)$$

Из общих свойств уравнения ШЛ известно, что значения u_n ортогональны в соответствии с формулой (2.1) – $\int_0^a u_i u_j \mathrm{d}x = 0$, в чем легко убедиться, решив уравнение (2.9) и нормируя u_n

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(n\pi x/a); \quad \lambda_n = k^2 - (n\pi/a)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (2.10)$$

Ортонормированная система $\{\mathbf{u}_n\}$ является базисной для решения неоднородного уравнения типа (2.11), рассмотренного ниже.

2.2. Метод моментов

Метод моментов используется для решения дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений краевых внутренних и внешних задач. В отличие от МКР, МКЭ и МКРВО данный метод не требует дискретизации области и, следовательно, свободен от численной дисперсии. Метод моментов успешно работает для структур с размером не более нескольких длин волны, что ограничено существенными вычислительными ресурсами, необходимыми для реализации метода.

2.2.1. Общая схема метода

Рассмотрим некоторую электродинамическую задачу, сформулированную в виде операторного уравнения относительно неизвестной функции u

$$\mathbf{L}u = f, \tag{2.11}$$

где $\mathbf{L}$ – оператор(+) задачи, например интегральный или дифференциальный (полагаем его линейным), а значком (+) отмечены понятия, определения которым даны в Приложении 1; f – заданная функция, выражающая то или иное внешнее воздействие на объект.

Метод моментов, т.е. построение основной проекционной схемы, позволяет свести решение задачи (2.11) относительно неизвестной функции u к системе линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим тождественно равную нулю функцию $\mathbf{L}u - f = 0$. Разлагая ее в ряд Фурье типа (2.4) по полной ортогональной системе *базисных* функций $\{\mathbf{u}_n\}$, мы должны положить все коэффициенты Фурье равными нулю:

$$(\mathbf{L}u - f, u_k) = 0, \quad k = 1, 2, ..., \infty, \tag{2.12}$$

при этом функции u_k называют *проекционными* (*пробными*). Приближенное решение задачи ищем в виде ортогонального представления

$$u^N = \sum_{n=1}^{N} a_n^N u_n, \tag{2.13}$$

где a_n^N – неизвестные коэффициенты; систему функций $\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^N$ называют *базисной системой функций* ММ. Для каждой базисной функции u_n должно иметь смысл выражение $\mathbf{L}u_n$. Подставим далее представление (2.13) в (2.12) вместо u. Тогда имеем

$$(\mathbf{L}u^N - f, u_k) = 0, \quad k = 1, 2, ..., N. \tag{2.14}$$

Совокупность равенств (2.14) – это условие ортогональности невязки ($\mathbf{L}u^N - f$) функциям u_k, принадлежащим базису $\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^N$. Выполнение требования (2.14) должно привести к определенному выбору коэффициентов a_n^N и, следовательно, формированию приближенного решения u^N (2.13). Как видно из (2.14), при подстановке (2.13) возникает следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{L}u_1, u_1)a_1^N + (\mathbf{L}u_2, u_1)a_2^N + ... + (\mathbf{L}u_N, u_1)a_N^N = (f, u_1),\\
&(\mathbf{L}u_1, u_2)a_1^N + (\mathbf{L}u_2, u_2)a_2^N + ... + (\mathbf{L}u_N, u_2)a_N^N = (f, u_2),\\
&...,\\
&(\mathbf{L}u_1, u_N)a_1^N + (\mathbf{L}u_2, u_N)a_2^N + ... + (\mathbf{L}u_N, u_N)a_N^N = (f, u_N),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

или в краткой записи

$$[\mathbf{L}]\,\mathbf{a}^N >= \mathbf{f} >, \tag{2.16}$$

где $[\mathbf{L}]$ – матрица, элементы которой $\mathrm{L}_{kn} = (\mathbf{L}u_n, u_k)$; $\mathbf{a}^N >= (a_1^N, a_2^N, ..., a_N^N)^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец неизвестных коэффициентов; $\mathbf{f} >= \left((f, \mathrm{u}_1), (f, \mathrm{u}_2), ..., (f, \mathrm{u}_N)\right)^T$ – вектор-столбец заданной функции; T – знак транспонирования.

Таким образом, нахождение коэффициентов a_n^N сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [25, 26]

$$\mathbf{a}^N >= \mathbf{L}^{-1}\mathbf{f} >, \tag{2.17}$$

где $\mathbf{L}^{-1}$ – обратная матрица. Приближенное решение u^N в соответствии с (2.13) принимает вид

$$\mathrm{u}^N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^N \mathrm{u}_n = <\mathbf{u}_n^N \mathbf{a}^N> = <\mathbf{u}_n^N \mathbf{L}^{-1}\mathbf{f}>, \tag{2.18}$$

где $<\mathbf{u}_n^N = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, ..., \mathrm{u}_N)$ – вектор-строка.

В рассмотренном методе базисные (2.13) и проекционные (2.12) функции совпадают. В этом случае метод нахождения решения носит название метода Бубнова-Галеркина. В общем случае эти функции берутся различными, а изложенный выше подход называют *методом моментов*.

2.2.2. Метод Бубнова–Галеркина для скалярного одномерного дифференциального уравнения

В пп. 2.1.2 найдены собственные функции и собственные значения для одномерного дифференциального уравнения ШЛ (2.10). Покажем, как с их помощью можно получить решение соответствующего неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+k^2 y=-g(x),\quad 0\le x\le a,\quad y(0)=y(a)=0. \tag{2.19}$$

Представим $y(x)$ и $g(x)$ аналогично уравнению (2.13)

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty} y_n u_n(x),\quad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n u_n(x), \tag{2.20}$$

где y_n, g_n – коэффициенты разложения, а функция $u_n(x)$ определена в записи (2.10). Подставляя (2.20) в уравнение (2.19) и учитывая (2.10) находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[k^2-(n\pi/a)^2\right]y_n u_n(x)=-\sum_{n=1}^{\infty} g_n u_n(x). \tag{2.21}$$

Сравнивая левую и правую части выражения (2.21), запишем следующее соотношение между коэффициентами y_n и g_n:

$$\left[k^2-(n\pi/a)^2\right]y_n=-g_n. \tag{2.22}$$

Это выражение можно получить, используя ортогональность функций $u_n(x)=\left(\sqrt{2/a}\right)\sin(n\pi x/a)$. Подставляя y_n из равенства (2.22) в (2.20), будем иметь решение (2.19) в следующем виде:

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n}{k^2-(n\pi/a)^2}\left(\sqrt{2/a}\right)\sin(n\pi x/a). \tag{2.23}$$

2.2.3. К выбору базисных и проекционных функций

При использовании обсуждаемых методов следует иметь в виду, что к базисным функциям предъявляются достаточно противоречивые требования:

– базисные функции должны быть линейно независимы и обладать свойством *полноты*(+) (Приложение 1);

– базисные, а в ряде алгоритмов и проекционные функции должны принадлежать к области определения оператора **L**, что для дифференциальных операторов означает существование производных функции соответствующего порядка и удовлетворение краевым условиям задачи;

– должна достигаться минимальная ошибка аппроксимации решения (2.18) при заданном числе функций N;

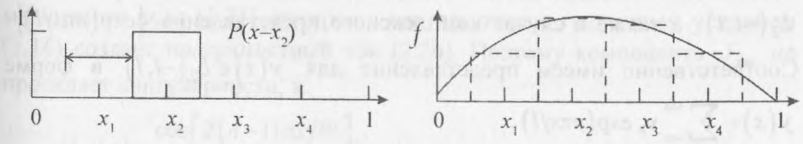
– должна обеспечиваться устойчивость решения (2.18) при увеличении числа функций N, т.е. сходимости проекционной схемы, для чего следует задавать базисные функции с учетом особенности на ребрах (1.24).

К этому нужно добавить простоту вычисления матрицы $[\mathbf{L}]$ – минимального числа операций для вычисления с заданной точностью. Видимо, нет абсолютных критериев качества при таком выборе. Виды базисных и проекционных функций можно условно разделить на две группы: функции, отличные от нуля в пределах некоторых подобластей, на которые разбита вся область анализа, и определенные во всей области анализа. Приведем примеры некоторых функций первой и второй групп.

Импульсные функции. Пусть анализируемая область $0\le x\le 1$ разделена на $N+1$ равных интервалов шириной $\delta_x=1/(N+1)$ и средними точками $x_n=n/(N+1)$, $n=1, 2, 3, \ldots$ Базовая импульсная функция $P(x-x_n)$ выражается как (рис. 2.1а)

$$P(x-x_n)=\begin{cases}1 & \text{для } x_n-\delta_x/2\le x\le x_n+\delta_x/2,\\ 0 & \text{для остальных значений.}\end{cases} \tag{2.24}$$

Функции $P(x-x_n)$ ортогональны, поскольку не перекрываются. Они не могут быть использованы в задачах, где необходимы вторые производные. Аппроксимация имеет вид $f(x)=\sum_n y_n P(x-x_n)$ и показана для $N=4$ на рис. 2.1,*б*.



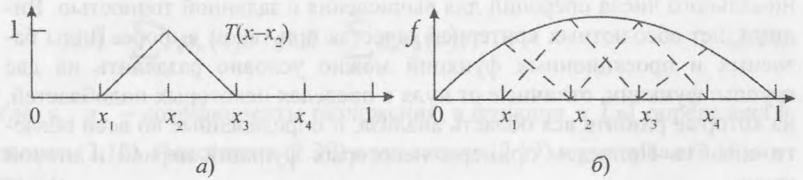
а) *б)*

Рис. 2.1. Базисные функции:
а – импульсные; *б* – аппроксимация

Треугольные функции. Могут быть дифференцируемы дважды, удобны для вычисления интегралов в ММ и ускоряют сходимость. Треугольную функцию можно представить как

$$\mathrm{T}(x-x_n)=\begin{cases}(x-x_{n-1})/(x_n-x_{n-1}) & \text{для } x_{n-1}\le x\le x_n,\\ (x_{n+1}-x)/(x_{n+1}-x_n) & \text{для } x_n\le x\le x_{n+1},\\ 0 & \text{для остальных значений.}\end{cases} \qquad (2.25)$$

Функции (2.24) для $N=4$ показаны на рис. 2.2,*а*, а их кусочно-линейная аппроксимация – на рис. 2.2,*б*.



а) *б*)

Рис. 2.2. Базисные функции:
а – треугольные функции; б – аппроксимация

Для двумерного случая используется функция «плоская крыша» – комбинация кусочно-линейной (2.25) аппроксимации по одной переменной и импульсной (2.24) по другой.

Тригонометрические функции. Рассмотрим пространство $L_2(-\pi,\pi)$ функций с интегрируемым квадратом на отрезке $(-\pi,\pi)$. В этом пространстве функции $\{\cos nx,\ \sin nx\}$ $(n=0,1,2,...)$ образуют полную ортогональную систему. Ортогональность этой системы легко проверяется непосредственным вычислением, а соответствующий ряд Фурье, сходящийся в среднем (2.6) к функции $y(x)\in L_2(-\pi,\pi)$, имеет вид $y(x)=a_0/2+\sum_{n=1} a_n\cos nx+b_n\sin nx$. Базисные функции, очевидно, преобразуются к виду $\{\cos(n\pi x/l),\ \sin(n\pi x/l)\}$ для пространства $L_2(-l,l)$, а также в случае комплексного представления $\{\exp(n\pi x/l)\}$. Соответственно имеем представление для $y(x)\in L_2(-l,l)$ в форме $y(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} y_n\exp(n\pi x/l)$.

Степенные многочлены. Аппарат степенных многочленов относится к классическим средствам приближения функций. В частности, разложение функции $y(x)\in L_2(-1,\ 1)$ по многочленам Лежандра

$P_n(x)=\dfrac{1}{n!2^n}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n$ представляется как $y(x)=\sum_0^\infty y_nP_n(x)$, где $y_n=(2n+1)/2\int_{-1}^{1}y(x)P_n(x)$.

В качестве базисных функций можно также взять сумму дельта-функций, т.е. удовлетворить решению в отдельных точках, реализуя метод коллокации.

Полиномы Чебышева. Аппроксимация функции полиномами Чебышева используется для учета краевых особенностей поля и ускорения сходимости. Например, в случае функции, имеющей особенность на полуплоскости (1.24), такое представление запишем как $y(x)=\sum_n y_nT_n(x)/\sqrt{1-x^2}$, где $T_n(x)$ – полином Чебышева 1-го рода, $x\in[-1,+1]$, ортогональный в смысле $\int_{-1}^{1}T_m(x)T_n(x)/\sqrt{1-x^2}=1$ при $m=n$ и 0 при $m\ne n$.

В качестве базисных используются также функции Бесселя, сплайны, кусочно-синусоидальные функции и т.п.

Базисные функции распределения тока на металлической ленте. Электрический ток на металлической ленте шириной W (рис. 1.7,*г*) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{J}(x)=\mathbf{x}_0J_x(x)+\mathbf{z}_0J_z(x), \qquad (2.26)$$

при этом компоненты тока представим в форме

$$J_x(x)=\sum_{m=1}^{M}a_mJ_{xm}(x)\ \text{ и }\ J_z(x)=\sum_{n=1}^{N}a_nJ_{zn}(x), \qquad (2.27)$$

где базисные функции выберем в виде

$$J_{xm}(x)=\sin(2m\pi x/W),\ m=1,2,3,...M \text{ для } -W/2\le x\le W/2, \qquad (2.28а)$$

$$J_{zn}(x)=\cos\left[2(n-1)\pi x/W\right],\ n=1,2,3,...N \text{ для } -W/2\le x\le W/2. \qquad (2.28б)$$

Для ускорения сходимости нужно учесть краевые особенности магнитного поля (1.24), которое в соответствии с граничным условием (1.16) создает поверхностный ток (2.26). Поэтому компонента J_{xm} не проявляет сингулярности, а

$$J_{zn}(x)=\frac{\cos\left[2(n-1)\pi x/W\right]}{\sqrt{1-(2x/W)^2}}, \qquad (2.29)$$

$n=1,2,3,...N$ для $-W/2\le x\le W/2$.

Функции, рассмотренные выше, ортогональны и для J_{zn} $(n = 1, 2, 3)$ представлены на рис. 2.3.

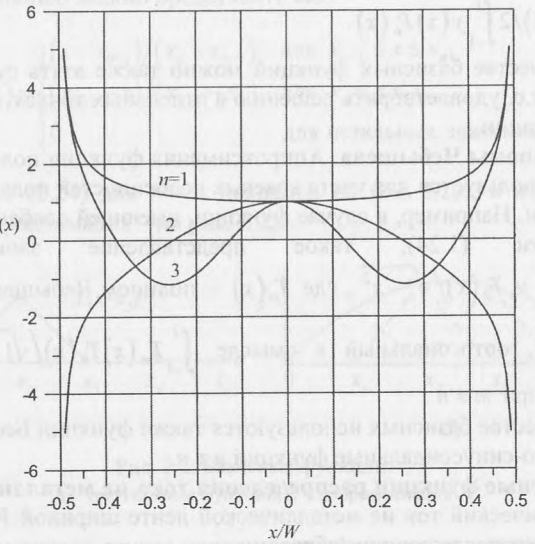


Рис. 2.3. Базисные функции J_{zn}

2.3. Некоторые проекционные схемы для уравнений Максвелла

Проекционные схемы решения векторных задач на основе уравнений Максвелла реализуются аналогично рассмотренным выше, однако требуют дополнительного обоснования.

2.3.1. Основная проекционная схема

Для гармонической временной зависимости в комплексной форме уравнения Максвелла при отсутствии потерь и сторонних магнитных токов соответствуют выражениям (1.11):

$$\nabla\times\dot{\mathbf{H}} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\,\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}},\quad \nabla\times\dot{\mathbf{E}} = -i\omega\mu_0\mu\,\dot{\mathbf{H}}. \tag{2.30}$$

Эти уравнения можно выразить в форме, аналогичной (2.11). Для этого достаточно применить так называемый оператор Максвелла $\hat{\mathbf{M}}$,

ввести обобщенную проницаемость π и вместо векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ рассматривать столбец $\mathbf{F}$. Т.е. [8, 15]

$$\hat{\mathbf{M}} = i\begin{pmatrix} 0 & -\nabla\times \\ \nabla\times & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0\varepsilon & 0 \\ 0 & \mu_0\mu \end{pmatrix},\ \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{E}} \\ \dot{\mathbf{H}} \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

и уравнения (2.30) принимают вид:

$$\left(\hat{\mathbf{M}} - \omega\boldsymbol{\pi}\right)\mathbf{F} = \mathbf{I}, \tag{2.32}$$

где $\mathbf{I}$ – вектор-столбец с компонентами $(-i\,\mathbf{J}^{\text{ст}})$ и 0.

Проекционная схема реализуется как для представления (2.30), так и для (2.32). Итак, пусть в области V с границей S надо найти некоторое электромагнитное поле в виде комплексных амплитуд $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$, при этом параметры среды ε, μ полагаем неоднородными, т.е. зависящими от координат. В объеме V зададим системы функций $\{\mathbf{E}_n\}_{n=1}^{N}$, $\{\mathbf{H}_n\}_{n=1}^{N}$, которые не являются решениями исходных уравнений Максвелла (2.30) при заданных ε, μ и ω. Применительно к уравнениям (2.30) проекционная форма (2.12) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &\int_V \left(\nabla\times\dot{\mathbf{H}} - i\omega\varepsilon_0\varepsilon\,\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{J}}^{cm}\right)\overline{\mathbf{E}}_k\,dV = 0, \\ &\int_V \left(\nabla\times\dot{\mathbf{E}} + i\omega\mu_0\mu\,\dot{\mathbf{E}}\right)\overline{\mathbf{H}}_k\,dV = 0, \quad k = 1, 2, ..., \infty. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Действительно, если системы $\{\mathbf{E}_n\}_{n=1}^{N}$, $\{\mathbf{H}_n\}_{n=1}^{N}$ ортогональны, то соотношения (2.33) очевидны: они отражают равенство нулю коэффициентов Фурье подынтегральных функций. В качестве $\{\mathbf{E}_n\}_{n=1}^{N}$, $\{\mathbf{H}_n\}_{n=1}^{N}$ удобно взять системы векторных функций для некоторой области V_0, которая в общем случае охватывает V: $V \in V_0$, т.е. используется базис полей области V_0, в частности $V = V_0$. В методе Бубнова–Галеркина решение в соответствии с уравнением (2.13) представляется в форме, где собственные функции $\dot{\mathbf{E}}_k$, $\dot{\mathbf{H}}_k$ и соответствующие собственные значения χ_k дает электромагнитное поле и собственную частоту ω_k:

$$\chi_k = k_k = \left(\omega_k/c\right)^2 \varepsilon\mu$$

$$\mathbf{E}^N = \sum_{n=1}^{N} a_n\mathbf{E}_n,\quad \mathbf{H}^N = \sum_{n=1}^{N} b_n\mathbf{H}_n, \tag{2.34}$$

где a_n, b_n – неизвестные коэффициенты. Поскольку прямая подстановка уравнений (2.34) в (2.33) должна сохранять смысл при $N \to \infty$, то должна быть корректна операция вычисления производных в роторе по отношению к ортогональным рядам. Поэтому проекционную форму (2.33) предварительно преобразуют, интегрируя по частям с помощью формул (1.2в), формулы Остроградского–Гаусса и уравнений Максвелла для собственных векторных функций (положив в них $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$). Тогда соотношения (2.33) принимают вид

$$\begin{aligned} &\omega\varepsilon_0 \int_V \varepsilon \dot{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{E}}_k \mathrm{d}V - \omega_k \mu_0 \int_V \varepsilon \dot{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{H}}_k \mathrm{d}V - i\int_S \left[\bar{\mathbf{E}}_k, \dot{\mathbf{H}}\right] \mathbf{ds} - i\int_V \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}} \bar{\mathbf{E}}_k \mathrm{d}V = 0, \\ &-\omega_k \varepsilon_0 \int_V \dot{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{E}}_k \mathrm{d}V + \omega\mu_0 \int_V \mu \dot{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{H}}_k \mathrm{d}V - i\int_S \left[\dot{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{H}}\right] \mathbf{ds} = 0, \; k = 1, 2, ..., \infty. \end{aligned} \tag{2.35}$$

При подстановке (2.34) в (2.35) получается некоторая алгебраическая форма, решение которой требует, вообще говоря, дополнительного обоснования.

2.3.2. Проекционные наложения граничных условий

Рассмотренные выше проекционные методы являются универсальными. Представление электромагнитного поля в виде равенств (2.7) можно строить, используя достаточно простые системы $\{\mathbf{E}_n\}_{n=1}^N$, $\{\mathbf{H}_n\}_{n=1}^N$. Так, например, используются функции, удовлетворяющие уравнениям Максвелла, но не удовлетворяющие граничным условиям на границе области. Наложение на разложение (2.7) определенных граничных условий приводит к определению коэффициентов $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\{b_n\}_{n=1}^N$. Очевидно, что при конечном N это можно сделать лишь приближенно. Процесс наложения граничных условий проводится в проекционной форме, т.е. аналогично методам моментов и Бубнова–Галеркина. Такой подход называют *методом* (*подходом*) *Трефтца*, а введенную в равенствах (2.34) систему решений уравнения Максвелла $\{\mathbf{E}_n\}_{n=1}^N$, $\{\mathbf{H}_n\}_{n=1}^N$ – базисом Трефтца.

На рис. 2.4. представлены некоторые электродинамические структуры, для решения которых целесообразно применение метода Трефтца. Общим для этих структур является то, что область, в которой ищется электромагнитное поле, делят на несколько областей, в каждой из которых базис Трефтца может быть найден известными методами, например МРП. Базисы Трефтца должны обладать свойством полноты (см. Приложение 1) на смежных границах областей, где производится проекционное наложение граничных условий непрерывности тангенциальных компонент.

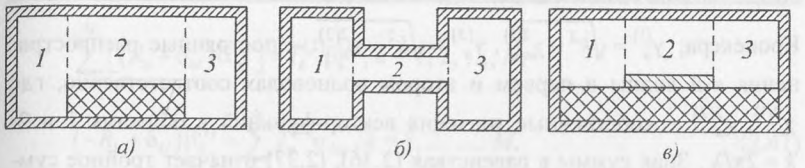


Рис. 2.4. Электродинамические структуры

Общий подход к решению таких задач рассмотрим на примере стыка двух регулярных волноводов с различными поперечными сечениями (рис. 2.5) [9, 15]. Пусть стык возбуждается волной (падающей слева) единичной амплитуды с индексом l. Тогда поле $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(1)}$ в первом и $\mathbf{E}^{(2)}$, $\mathbf{H}^{(2)}$ во втором волноводах можно представить в виде

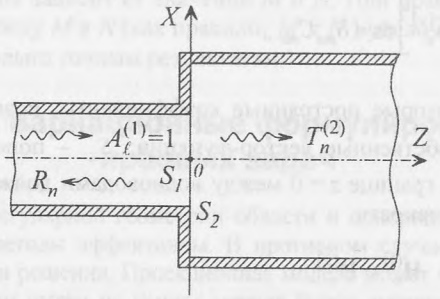


Рис. 2.5. Стык двух регулярных волноводов с различными поперечными сечениями

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(1)} &= \sum_{n=1}^{M} \left[\exp\left(-i\gamma_n^{(1)} z\right) \mathbf{e}_n^{(1)}(x,y)\delta_{nl} + R_n \exp\left(i\gamma_n^{(1)} z\right) \mathbf{e}_n^{(1)}(x,y) \right], \\ \mathbf{H}^{(1)} &= \sum_{n=1}^{M} \left[\exp\left(-i\gamma_n^{(1)} z\right) \mathbf{h}_n^{(1)}(x,y)\delta_{nl} - R_n \exp\left(i\gamma_n^{(1)} z\right) \mathbf{h}_n^{(1)}(x,y) \right], \; z \le 0; \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(2)} &= \sum_{n=1}^{N} \left[T_n^{(2)} \exp\left(-i\gamma_n^{(2)} z\right) \mathbf{e}_n^{(2)}(x,y) \right], \\ \mathbf{H}^{(2)} &= \sum_{n=1}^{N} \left[T_n^{(2)} \exp\left(-i\gamma_n^{(2)} z\right) \mathbf{h}_n^{(2)}(x,y) \right], \; z \ge 0. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Здесь $\mathbf{e}_n^{(i)}$, $\mathbf{h}_n^{(i)}$ – собственные функции волноводов; R_n, $T_n^{(2)}$ – комплексные амплитуды отраженных и прошедших волн; δ_{nl} – символ

Кронекера; $\gamma_n^{(1)} = \sqrt{k^2 - \chi_n^{2(1)}}$, $\gamma_n^{(2)} = \sqrt{k^2 - \chi_n^{2(2)}}$ – постоянные распространения n-й волны в первом и втором волноводах соответственно, где $\chi_n^{2(1)}$, $\chi_n^{2(2)}$ – собственные значения вектор-функций в областях 1 и 2; $k = 2\pi/\lambda$. Знак суммы в равенствах (2.36), (2.37) означает тройное суммирование по упорядоченной системе индексов q_1, q_2, (m, n), обозначенных для краткости одним индексом n; q_1, q_2 – суммирование по E- и H-волнам, а (m, n) – суммирование по типам волн. Собственные значения $\chi_n^{2(1)}, \chi_n^{2(2)}$ и собственные вектор-функции $\mathbf{e}_n^{(v)}$, $\mathbf{h}_n^{(v)}$ определяются в соответствии с выражениями (1.52)–(1.54). Собственные вектор-функции оператора $\mathbf{L} = \nabla_\perp^2 + \chi^2$ ортогональны:

$$\int_{S_\perp} \left[\mathbf{e}_n^{(v)}, \ldots \overline{\mathbf{h}}_n^{(v)} \right] \mathbf{ds} = \delta_{mn} C_{mn}, \tag{2.38}$$

где C_{mn} – некоторые постоянные коэффициенты, позволяющие ортонормировать собственные вектор-функции; $S_\perp$ – поперечное сечение волноводов. На границе $z = 0$ между волноводами должно выполняться условие непрерывности

$$\mathbf{E}_\tau^{(1)} = \mathbf{E}_\tau^{(2)}, \quad \mathbf{H}_\tau^{(1)} = \mathbf{H}_\tau^{(2)}. \tag{2.39}$$

Запишем проекционные аналоги условий непрерывности (2.39)

$$\int_{S_2} \left[\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)}, \overline{\mathbf{h}}_k^{(2)} \right]_z ds = 0, \; k = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\int_{S_1} \left[\overline{\mathbf{e}}_k^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(2)} \right]_z ds = 0, \; k = 1, 2, \ldots, M. \tag{2.40}$$

Подчеркнем, что непрерывность $\mathbf{E}_\tau$ имеет место на большом сечении S_2, при этом вне отверстия S_1 на перегораживающей части стыка $\mathbf{E}_\tau(+0) = \mathbf{E}_\tau(-0) = 0$. Компонента $\mathbf{H}_\tau$ непрерывна лишь в области меньшего сечения S_1.

Внесем значения (2.36), (2.37) в уравнения (2.40), учтем соотношение ортогональности (2.38), в котором надо выбрать $S_\perp = S_{1,2}$. Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов R_n, $T_n^{(2)}$ представлений (2.36), (2.37):

$$\sum_{n=1}^{M} \left[(R_n + \delta_{nl}) \overline{\alpha}_{nk} \right] = T_k^{(2)} \beta_k^{(2)}, \; k = 1, 2, \ldots, N,$$

$$(-R_k + \delta_{kl}) \beta_k^{(1)} = \sum_{n=1}^{N} T_n^{(2)} \alpha_{kn}, \; k = 1, 2, \ldots, M, \tag{2.41}$$

где

$$\overline{\alpha}_{nk} = \int_{S_1} \left[\mathbf{e}_n^{(1)}, \overline{\mathbf{h}}_k^{(2)} \right]_z ds; \; \beta_k^{(2)} = \int_{S_2} \left[\mathbf{e}_k^{(2)}, \overline{\mathbf{h}}_k^{(2)} \right]_z ds;$$

$$\beta_k^{(1)} = \int_{S_1} \left[\overline{\mathbf{e}}_k^{(1)}, \mathbf{h}_k^{(1)} \right]_z ds; \; \alpha_{kn} = \int_{S_1} \left[\overline{\mathbf{e}}_k^{(1)}, \mathbf{h}_n^{(2)} \right]_z ds.$$

Система неоднородная и в общем случае бесконечная. Разумеется, точность решения зависит от значений M и N. При правильном выборе соотношения между M и N (как правило, $M < N$) увеличение этих чисел приводит к довольно точным результатам.

2.4. Вариационные формулировки краевых задач

В случае регулярной геометрии области и однородного заполнения проекционные методы эффективны. В противном случае целесообразно искать иные пути решения. Проекционная модель может быть получена и совершенно иным путем на основе метода Ритца, основанного на вариационном подходе [7, 8, 20, 21, 27]. Его основная идея состоит в том, что для искомой величины (например, постоянной распространения в линии передачи) находится такая формула, выражающая эту величину в виде интеграла от какой-либо функции (например, от распределения собственного электромагнитного поля в линии), которая удовлетворяет следующим требованиям. Во-первых, дает точное значение искомой величины, если в нее подставить точное значение функции. Во-вторых, при подстановке приближенного значения функции дает для искомой величины приближенное значение с существенно меньшей погрешностью, чем погрешность подставляемой функции. Такие выражения («функции от функций») называются *стационарными функционалами*[+] (см. Приложение 1).

2.4.1. Стационарный функционал

Запишем простейший общий вид функционала $F[u(x)]$

$$F[u(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f[u(x), u'(x), x] dx, \tag{2.42}$$

где $f[u(x), u'(x), x]$ – явно зависящая от $x, u(x)$ и $u'(x)$ функция. Обозначим через $\delta u(x)$ изменение функции $u(x)$, которое приводит к изменению функции f, и выразим это изменение как $\delta u(x) = \alpha\eta(x)$, где α – определяет величину вариации, а $\eta(x)$ – закон вариации; $\delta u'(x) = \alpha\eta'(x)$. Тогда для $f(u, u', x)$ имеем

$$f[u+\alpha\eta, u'+\alpha\eta', x] \cong f[u, u', x] + (\partial f/\partial u)\alpha\eta + (\partial f/\partial u')\alpha\eta' . \quad (2.43)$$

Следовательно, вариация функционала равна $\delta F = F[u+\delta u] - F[u]$, что с учетом равенств (2.43) дает

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \left[(\partial f/\partial u)\delta u + (\partial f/\partial u')\delta u' \right] \mathrm{d}x . \quad (2.44)$$

Функционал называется стационарным, если его приращение для некоторой функции $u(x)$ равно нулю, т.е. $\delta F = 0$ или $\delta F/\delta u|_{\delta u \to 0} = 0$. Покажем в качестве примера, что функция $u(x) = \sin(\pi x)$, $\delta u(x) = \alpha \sin(\pi x)$ при $\alpha = 0{,}01$ является экстремальной для функционала

$$F[u(x)] = \int_0^1 \left[(u')^2 - \pi^2 u^2 \right] dx, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (2.45)$$

где $f = (u')^2 - \pi^2 u^2$, $\partial f/\partial u = -2\pi^2 u$, $\partial f/\partial u' = 2u'$, $u' = \pi\cos(\pi x)$, $\delta u'(x) = \alpha\pi\cos(\pi x)$. Тогда с учетом уравнения (2.44) для (2.45) получим

$$\delta F[\sin(\pi x)] = \int_0^1 \left[-2\pi^2 u\alpha \sin(\pi x) + 2u'\alpha\pi\cos(\pi x) \right] dx = 0 . \quad (2.46)$$

С другой стороны, доказано [24], что функция $u(x)$, на которой функционал стационарен, должна удовлетворять *уравнению Эйлера*

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u'} \right) = 0 . \quad (2.47)$$

Запишем уравнение Эйлера для функционала (2.45), учитывая пояснения к (2.45)

$$-2\pi^2 u - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2u') = 0 \text{ или}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \pi^2 u = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad u(0) = u(1) = 0 , \quad (2.48)$$

решение которого имеет вид $u(x) = \sin(\pi x)$. Это же решение было получено ранее из условия стационарности функционала (2.45). Вывод, который следует из сказанного: можно или решать уравнение (2.47), или находить функцию $u(x)$, на которой функционал (2.45) стационарен.

Под *вариационным подходом* понимается процедура построения функционала, стационарные значения которого соответствуют решению соответствующей электродинамической задачи. Приведенные рассуждения очевидным образом распространяются на функционалы от нескольких переменных.

Во введении к п. 2.4 выдвигались требования, предъявляемые к стационарному функционалу. Обсудим их на примере стационарного функционала для нахождения собственных частот резонатора $k^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a$. Пусть задано скалярное волновое уравнение

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (2.49а)$$

для внутренней области V объемного резонатора, ограниченного поверхностью S, на которой должно выполняться граничное условие

$$\partial u/\partial n|_S = 0 , \quad (2.49б)$$

где n – направление нормали к поверхности S. Чтобы получить функционал, умножим (2.49а) на u^*, проинтегрируем по области V резонатора:

$$\int_V \left(u^* \nabla^2 u + k^2 u u^* \right) \mathrm{d}V = 0 \quad (2.50)$$

и воспользуемся первой формулой Грина

$$\int_V \left(\nabla\varphi\nabla\Psi + \varphi\nabla^2\psi \right) \mathrm{d}V = \int_S \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} \mathrm{d}S , \quad (2.51)$$

положив в которой $\psi = u$, $\varphi = u^*$, учтем граничное условие (2.49б). Подставив в (2.50), получим

$$k^2 = F(u) = \int_V |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}V \Big/ \int_V |u|^2 \, \mathrm{d}V . \quad (2.52)$$

Итак, мы «в лоб» доказали выполнение первого требования: точное решение $u = u_0$ уравнения (2.49а) дает точное решение для функционала (2.52). Докажем для (2.52) выполнение второго требования (для

простоты полагаем, что все функции вещественны): при подстановке приближенного значения функции $u = u_0 + \alpha\eta, \alpha << 1$ отличие $F(u)$ от k^2 имеет более высокий порядок малости, чем α. Именно, $F(u_0 + \alpha\eta) = k^2\left\{1 + O(\alpha^2)\right\}$. Для этого, подставив $u = u_0 + \alpha\eta$ в уравнение (2.52), будем иметь

$$F(u_0 + \alpha\eta) = \frac{\int_V (\nabla u_0)^2 dV + 2\alpha\int_V \nabla u_0 \nabla\eta dV + O(\alpha^2)}{\int_V u_0^2 dV + 2\alpha\int_V u_0\eta dV + O(\alpha^2)}. \quad (2.53)$$

Первый член в выражении (2.53) согласно формуле (2.52) в k^2 раз больше первого члена знаменателя. Также соотносятся и вторые члены числителя и знаменателя, что следует из равенства (2.51), если принять $\varphi = \eta, \psi = u_0$ и учесть, что u_0 удовлетворяет волновому уравнению и граничным условиям. Именно вследствие этого условия исчезнет поверхностный интеграл в равенстве (2.51) при преобразовании второго члена в числителе выражения (2.53). Окончательно получим

$$F(u_0 + \alpha\eta) = \frac{k^2\int_V u_0^2 dV + 2\alpha k^2\int_V u_0\eta dV + O(\alpha^2)}{\int_V u_0^2 dV + 2\alpha\int_V u_0\eta dV + O(\alpha^2)}. \quad (2.54)$$

Заметим, что на функцию η не накладывается никаких ограничений, кроме существования интегралов в (2.52) – условие непрерывности. Для доказательства условий стационарности функционала использовалось только условие (2.49а), при этом не накладывалось никаких граничных условий, в частности (2.49б). Такие граничные условия называются *естественными* для данного функционала. Итак, можно найти приближенное значение собственной частоты задачи (2.49а), подставив в уравнение (2.52) какую-либо функцию, приближенно решающую эту задачу.

Ситуация будет иной, если мы ищем собственное значение задачи (2.49а), но с иным, чем (2.49б), граничным условием, а именно $u|_S = 0$. Простая проверка показывает, что функционал (2.52) обладает по-прежнему свойством $F(u_0) = k^2$, но стационарен он не будет, т.е. для него не выполняется основное свойство: $F(u_0 + \alpha\eta) = k^2\left\{1 + O(\alpha^2)\right\}$. Граничное условие $u|_S = 0$ не является, таким образом, естественным для функционала (2.52). В этом случае возможны два подхода: использовать достаточно обширный набор функций, удовлетворяющих граничным условиям, либо изменить функционал (2.52), чтобы сделать

граничное условие $u|_S = 0$ естественным. Тогда для действительных значений функционал (2.52) принимает вид

$$F(u) = \left[\int_V (\nabla u)^2 dV - 2\oint_S u\frac{\partial u}{\partial n} dS\right] \Big/ \int_V u^2 dV. \quad (2.55)$$

Итак, стационарный функционал – удобный инструмент решения ряда электродинамических задач, однако его нужно уметь получить и доказать стационарность.

2.4.2. Энергетическая трактовка стационарного функционала

Энергия электростатического поля в некотором объеме V в соответствии с выражениями (1.35), (1.26) определяется для однородной среды как

$$W^э = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{DE} d\upsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_a\int_V |\nabla u|^2 dV = \quad (2.56)$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_a\int_V \left[(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 + (\partial u/\partial z)^2\right] dV,$$

которое представляет стационарный функционал $F(u)$ для уравнения Лапласа (1.32). Это легко доказать, записав уравнение Эйлера (2.47) для $f = (\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 + (\partial u/\partial z)^2$. Использование стационарности функционала особенно полезно для областей с неоднородным заполнением, нерегулярных областей и т.п.

Соответствующий стационарный функционал для уравнения Пуассона (1.27) имеет вид

$$F(u) = \int_V \left(\frac{\varepsilon_a}{2}|\nabla u|^2 - \rho u\right) dV. \quad (2.57)$$

2.4.3. Стационарный функционал в терминах функционального анализа

Решение операторных уравнений, как правило, наиболее обще и строго излагается в терминах функционального анализа. Однако за абстрактность изложения приходится расплачиваться наглядностью представлений. Возьмем за основу задачу (2.11), сформулированную в операторном виде как $\mathbf{L}u = f$, где $\mathbf{L}$ может быть оператором задачи

(2.49а): $\mathbf{L}=\nabla^2+k^2$ или задачи (1.54): $\mathbf{L}=\nabla_\perp^2+\chi^2$. Если оператор $\mathbf{L}$ *самосопряженный* и *положительно определенный*(+) (см. Приложение 1), то в соответствии с вариационным подходом решение задачи (2.11) заменяется отысканием функций, реализующих минимум некоторого функционала, в частности, имеющего вид [1, 2, 7, 20, 27]

$$F\,\mathrm{u}=\tfrac{1}{2}(\mathbf{L}\,\mathrm{u},\mathrm{u})-\tfrac{1}{2}(\mathrm{u},f)-\tfrac{1}{2}(f,\mathrm{u}), \qquad (2.58)$$

где скалярное произведение определено в (2.1).

Действительно, найдем вариацию этого функционала $\delta\Phi$, которая определяется аналогично дифференциалу как главная часть приращения функционала $\Phi(\mathrm{u}+\delta\mathrm{u})$. Вариацию будем искать по обычным правилам дифференцирования

$$\delta F=\tfrac{1}{2}(\mathbf{L}\delta\mathrm{u},\mathrm{u})+\tfrac{1}{2}(\mathbf{L}\,\mathrm{u},\delta\mathrm{u})-\tfrac{1}{2}(\delta\mathrm{u},f)-\tfrac{1}{2}(f,\delta\mathrm{u}). \qquad (2.59а)$$

Поскольку оператор L является самосопряженным, имеем $(\mathbf{L}\delta\mathrm{u},\mathrm{u})=(\delta\mathrm{u},\mathbf{L}\,\mathrm{u})$ (для конкретного оператора это свойство необходимо доказывать). И для (2.59а) можно записать

$$\delta F=\tfrac{1}{2}(\delta\mathrm{u},\mathbf{L}\,\mathrm{u}-f)+\tfrac{1}{2}(\mathbf{L}\,\mathrm{u}-f,\delta\mathrm{u}), \qquad (2.59б)$$

тогда, учитывая определение скалярного произведения (2.1), получаем

$$\delta F=\tfrac{1}{2}(\delta\mathrm{u},\mathbf{L}\,\mathrm{u}-f)+\tfrac{1}{2}(\mathbf{L}\,\mathrm{u}-f,\delta\mathrm{u})^*=\mathrm{Re}(\delta\mathrm{u},\mathbf{L}\,\mathrm{u}-f). \qquad (2.60)$$

Отсюда видно, что если u – точное решение уравнения $\mathbf{L}\,\mathrm{u}=f$, то $\delta F=0$, поскольку вариация $\delta\mathrm{u}$ произвольная. Вычислив вариацию от $\delta\Phi$, будем иметь выражение $\delta(\delta F)=\delta F(\mathrm{u}+\delta u)-\delta F(u)=\mathrm{Re}(\delta u,\mathbf{L}\delta u)$. Поскольку $\mathbf{L}$ – положительно определенный оператор, то из последнего выражения следует, что $\delta(\delta F)>0$ при $\delta u\neq 0$, т.е. стационарная точка соответствует минимуму функционала F.

В проведенном доказательстве широко используются свойства самосопряженности и положительной определенности оператора в функционале (2.58), который в этом случае называется *стандартным*. Однако при этом необходимо учесть граничные условия. Если граничные условия не являются естественными, то необходимо применять *модифицированный* функционал, например, как это сделано в задаче (2.57). В более сложных случаях (наличие потерь в среде, наличие анизотропии) требуются более сложные конструкции функционала, называемые *обобщенными*. Подробности можно найти в работах [7, 20, 27].

Не акцентируя пока внимание на процедуре учета граничных условий, запишем стационарный функционал для уравнения $\nabla^2u+\varepsilon k_0^2u=f$, оператор которого $\mathbf{L}=\nabla^2+\varepsilon k_0^2$ для действительного и неотрицательного значения коэффициента εk_0^2 является самосопряженным и положительно определенным. Тогда в соответствии с выражением (2.58)

$$F\,\mathrm{u}=\frac{1}{2}\left(\nabla^2u+\varepsilon k_0^2u,\,u\right)-(f,\,u)=$$
$$=\frac{1}{2}\int_\Omega\left[\nabla^2u+\varepsilon k_0^2u\right]u\mathrm{d}\Omega-\int_\Omega fu\,\mathrm{d}\Omega, \qquad (2.61)$$

или

$$F\,\mathrm{u}=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(-\nabla u\nabla u+\varepsilon k_0^2u^2\right)\mathrm{d}\Omega+\frac{1}{2}\int_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S-\int_\Omega fu\,\mathrm{d}\Omega\,. \qquad (2.62)$$

Здесь использованы тождество (1.5б), теорема о дивергенции и формула $\nabla u\mathbf{n}=\dfrac{\partial u}{\partial n}$:

$$\Psi(\nabla\cdot\nabla u)=-\nabla u\nabla\psi+\nabla\cdot(\psi\nabla u),$$
$$\int_\Omega\nabla\cdot(\nabla u)\mathrm{d}\Omega=\int_S u\nabla u\mathbf{n}\mathrm{d}S. \qquad (2.63)$$

Положим, что на границе выполняются однородные граничные условия Неймана. Тогда интеграл по контуру в уравнении (2.62) исчезает, и стационарный функционал принимает вид

$$F\,\mathrm{u}=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla u|^2+\varepsilon k_0^2u^2\right)\mathrm{d}\Omega+\int_\Omega fu\,\mathrm{d}\Omega\,. \qquad (2.64)$$

В таблице приведены дифференциальные уравнения и соответствующие им стандартные стационарные функционалы.

Дифференциальное уравнение:	Функционал F
Лапласа $\varepsilon\nabla^2u=0$	$\frac{1}{2}\varepsilon\int_V\lvert\nabla u\rvert^2\mathrm{d}\Omega$
Пуассона $\nabla^2u=-\rho/\varepsilon$	$\frac{1}{2}\int_V(\lvert\nabla u\rvert^2-\frac{2\rho u}{\varepsilon})\mathrm{d}\Omega$
Однородное волновое уравнение $\nabla^2u+\varepsilon k_0^2u=0$	$\frac{1}{2}\int_V\left(\lvert\nabla u\rvert^2-\varepsilon k_0^2u^2\right)\mathrm{d}\Omega$
Неоднородное волновое уравнение $\nabla^2u+\varepsilon k_0^2u=f$	$\frac{1}{2}\int_V\left(\lvert\nabla u\rvert^2-\varepsilon k_0^2u^2+2fu\right)\mathrm{d}\Omega$

2.4.4. Некоторые вариационные представления для уравнений Максвелла

Рассмотрим процедуру получения стационарного функционала для объема (резонатора) с неоднородным непрерывным заполнением, начав с записи уравнений Максвелла в операторной форме (2.31), (2.32) и полагая, что оператор $\hat{\mathbf{M}}$ самосопряженный. Составим функционал по правилу (2.58):

$$\Phi_{\hat{\mathbf{M}}} = \left(\left(\hat{\mathbf{M}} - \omega\pi\right)\mathbf{F},\ \mathbf{F}\right) - (\mathbf{F}, f) - (f, \mathbf{F}), \tag{2.65}$$

при этом скалярное произведение функций $\mathbf{F} = \left(\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}\right)^{\mathrm{T}}$ определяется в полном соответствии с равенством (2.1)

$$\left(\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_2\right) = \int_V \left(\dot{\mathbf{E}}_1\mathbf{E}_2^* + \dot{\mathbf{H}}_1\mathbf{H}_2^*\right)\mathrm{d}V, \tag{2.66}$$

где векторы перемножаются скалярно, а область V совпадает с объемом резонатора. Непосредственная подстановка значений (2.31), (2.32) в уравнение (2.65) с учетом (2.66) приводит к функционалу

$$\Phi_{\hat{\mathbf{M}}} = \int_V \left(\mathbf{H}^*\nabla\times\dot{\mathbf{E}} - \mathbf{E}^*\nabla\times\dot{\mathbf{H}}\right)\mathrm{d}V - \omega\int_V \left(\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^* + \mu_a\dot{\mathbf{H}}\mathbf{H}^*\right)\mathrm{d}V + \\ + i\int_V \left(-\dot{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{J}}^{\mathrm{ct}} + \dot{\mathbf{J}}^{\mathrm{ct}}\mathbf{E}^*\right)\mathrm{d}V. \tag{2.67}$$

К данному функционалу применяется метод Ритца, причем в качестве базисных функций берутся собственные функции резонатора с однородным заполнением. Недостатком функционала (2.67) является то, что базисные функции должны удовлетворять граничным условиям на поверхности резонатора. Этот недостаток устраняется введением в функционал еще одного слагаемого, аналогичного соотношениям (2.35), в виде поверхностного интеграла, учитывающего граничные условия

$$\tilde{\Phi}_{\hat{\mathbf{M}}} = \int_V \left(\mathbf{H}^*\nabla\times\dot{\mathbf{E}} - \mathbf{E}^*\nabla\times\dot{\mathbf{H}}\right)\mathrm{d}V - \int_S \left[\dot{\mathbf{E}}, \mathbf{H}^*\right]\mathbf{dS} - \\ - \omega\int_V \left(\varepsilon_a\dot{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{E}} + \mu_a\dot{\mathbf{H}}\mathbf{H}^*\right)\mathrm{d}V + i\int_V \left(-\dot{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{J}}^{\mathrm{ct}} + \dot{\mathbf{J}}^{\mathrm{ct}}\mathbf{E}^*\right)\mathrm{d}V. \tag{2.68}$$

2.5. Вариационный метод Ритца

Для простоты положим, что область определения оператора $\mathbf{L}$ действительная. Для отыскания минимума функционала (2.58) применяется подход, аналогичный методу Бубнова-Галеркина, описанному ра-

нее. Приближенное решение ищется в виде представления (2.13), причем функции u_n не являются собственными функциями оператора $\mathbf{L}$ (иначе задача решается аналитически до конца). В данном случае система $\{u_n\}$ образует базис, по которому можно разложить искомое решение

$$\mathrm{u}^{\mathrm{N}} = \sum_{n=1}^{N} c_n \mathrm{u}_{\mathrm{n}} = (\mathbf{c}>)^{\mathrm{T}}\mathbf{u}>=(\mathbf{u}>)^{\mathrm{T}}\mathbf{c}>, \tag{2.69}$$

где $(\mathbf{c}>)^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2, ..., c_n)$ – матрица-строка неизвестных коэффициентов; $\mathbf{u}>=(u_1, u_2, ..., u_n)^{\mathrm{T}}$ – матрица-столбец базисных функций.

С учетом сделанного выше замечания, подставив выражение (2.69) в (2.58), находим

$$F\,\mathrm{u} \approx F\,\mathrm{u}^{\mathrm{N}} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}>)^{\mathrm{T}}\int_\Omega \mathbf{u}>\mathbf{L}(\mathbf{u}>)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\Omega\mathbf{c}> - (\mathbf{c}>)^{\mathrm{T}}\int_\Omega \mathbf{u}> f\mathrm{d}\Omega, \tag{2.70}$$

Приближенное выражение (2.70) для функционала $F\,\mathrm{u}$ является по существу уже не функционалом, а функцией многих переменных коэффициентов c_n, экстремум которой отыскивается обычными методами, т.е. приравниванием производных по всем c_n к нулю:

$$\frac{\partial F\,\mathrm{u}}{\partial c_m} = \tfrac{1}{2}\int_\Omega u_m\mathbf{L}(\mathbf{u}>)^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}\Omega\mathbf{c}> + \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}>)^{\mathrm{T}}\int_\Omega \mathbf{u}>\mathbf{L}(u_m)\mathrm{d}\Omega - \\ - \int_\Omega u_m f\mathrm{d}\Omega = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} c_n\int_\Omega (u_m\mathbf{L}u_n + u_n\mathbf{L}u_m)\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega u_m f\mathrm{d}\Omega = 0, \tag{2.71}$$

$m = 1, 2, ..., N.$

Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_n, которую можно представить в форме матричного уравнения

$$[\mathbf{S}]\mathbf{c}> = \mathbf{b}>, \tag{2.72а}$$

где элементы матриц $[\mathbf{S}]$ и $\mathbf{b}>$ определены выражениями

$$S_{mn} = \tfrac{1}{2}\int_\Omega (u_m\mathbf{L}u_n + u_n\mathbf{L}u_m)\mathrm{d}\Omega, \quad b_m = \int_\Omega u_m f\mathrm{d}\Omega. \tag{2.72б}$$

Матрица $[\mathbf{S}]$ – симметричная и, учитывая самосопряженность оператора $\mathbf{L}$, для S_{mn} получаем

$$S_{mn} = \int_\Omega u_m\mathbf{L}u_n\mathrm{d}\Omega. \tag{2.72в}$$

Все приведенные выкладки, поясняющие идею вариационного подхода и алгоритма Ритца, носят формальный характер. Эквивалентность граничной задаче, необходимые свойства оператора $\mathbf{L}$, учет граничных условий, разрешимость полученных систем линейных алгебраических уравнений, сходимость представления (2.69) – все это требует специального обоснования [25, 26].

2.6. Метод взвешенных невязок

Точность решения, основанная на вариационном методе Ритца, зависит от стационарной природы функционала для соответствующей краевой задачи (см. таблицу, представленную ранее). Построение таких функционалов для многих скалярных и особенно векторных краевых задач является непростой задачей. Альтернативой служат рассмотренные выше методы моментов и Бубнова–Галеркина. Оба являются частными случаями так называемого *метода взвешенных невязок*, который начинается с записи операторного уравнения (2.11) $\mathbf{L}u = f$ в форме разности (невязки)

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}u - f, \tag{2.73}$$

удовлетворения в среднем (интегрально) требованию $\mathbf{R} = 0$ в области решения Ω взвешенной функциями w_k невязки

$$\int_{\Omega} w_k(x)\mathbf{R}(x)\,d\Omega = 0, \quad k = 1, 2, ..., N \tag{2.74}$$

и последующего поиска решения $u = u^N$ в виде представления (2.13):

$$\sum_{n=1}^{N}\left[\int_{\Omega}\left(w_k < \mathbf{L}u_n^N\right)d\Omega\right]\mathbf{a}^N > = \int_{\Omega} w_k f\,d\Omega, \quad k = 1, 2, ..., N. \tag{2.75}$$

Эти уравнения служат основой для нахождения коэффициентов $\mathbf{a}^N$. Если в качестве функций w_k взять $w_k = \delta(x - x_k)$, то реализуется метод коллокаций (поточечного согласования); когда взвешивающие и базисные функции одинаковы $w_k = u_k$ и ортогональны в Ω, то выражение (2.75) трансформируется в (2.15), что соответствует методу Бубнова–Галеркина; а если $\mathbf{L}u_k^N = w_k$, то реализуется метод наименьшей квадратичной невязки.

Конкретизируем обсужденную процедуру на примере одномерной краевой задачи ШЛ (2.8), которая очевидным образом перепишем в виде

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < a. \tag{2.76}$$

При этом в соответствии с выражением (2.76)

$$\mathbf{R} = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u(x) - f(x). \tag{2.77}$$

Прежде чем подставить значение (2.77) в (2.74), упростим первое слагаемое в уравнении (2.77), подставив его в (2.74) и проинтегрировав по частям. В результате получим

$$-\int_0^a w_k(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du(x)}{dx}\right)dx = -\left[p(x)w_k(x)\frac{du(x)}{dx}\right]_{x=0}^{x=a} + \\ +\int_0^a p(x)\frac{dw_k(x)}{dx}\frac{du(x)}{dx}dx. \tag{2.78}$$

Первое слагаемое в правой части обеспечивает выполнение граничных условий. Подставляя равенство (2.77) в уравнение (2.74) и учитывая (2.78), будем иметь систему уравнений, подготовленную для нахождения решения $u(x)$. При этом граничные условия уже учтены при записи выражения (2.78). Это уравнение носит название *слабой формы дифференциального уравнения*, поскольку удовлетворяет уравнению (2.76) в области решения в среднем (интегрально).

— ГЛАВА 3 —

Метод конечных разностей

Метод конечных разностей – МКР [28, 21] базируется на решении дифференциальных уравнений в частных производных, представленных в конечно-разностной форме. Метод достаточно универсальный, требует минимальной аналитической подготовки и легко программируем, однако при его использовании необходимо обращение матричных уравнений большого порядка. Кроме того, МКР создает промежуточную базу для МКРВО. Применение метода иллюстрируется на примерах определения емкости линии из двух неоднородно заполненных пластин и расчета характеристического импеданса и фазовой скорости экранированной микрополосковой линии.

3.1. Конечно-разностная аппроксимация

Метод конечных разностей включает в себя следующие основные шаги.

1. Для получения основного уравнения производные в решаемом дифференциальном уравнении выражаются в разностной форме.

2. Область дискретизируется в форме ячеек, содержащих конечное число узлов.

3. Конечно-разностная форма дифференциальных уравнений применяется для каждого узла, тем самым формируется система линейных уравнений.

4. Решается система линейных уравнений и находятся значения неизвестной функции в узлах ячеек.

5. Значения неизвестной функции в узлах ячеек используются для определения характерных параметров устройства (характеристического импеданса, критической длины волны, резонансной частоты и т.п.).

Пусть задана функция $f(x)$ (рис. 3.1). Производная функции в точке x_0 определяется как

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \qquad (3.1)$$

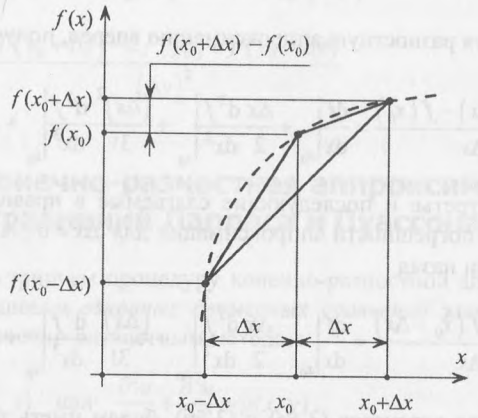


Рис. 3.1. К разностным формам аппроксимации первой производной

Выражение (3.1) является точным, однако неудобным для численной реализации, поскольку значения функции $f(x)$ могут быть заданы только в дискретных точках. Поэтому аппроксимируем равенство (3.1) в виде

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\approx\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (3.2а)$$

где Δx – шаг дискретизации, а представление (3.2а) носит название *разностной аппроксимации вперед*. Возможно аналогичное представление, называемое *разностной аппроксимацией назад:*

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}\approx\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}. \qquad (3.2б)$$

Существует еще одно возможное представление, называемое *центрально-разностной аппроксимацией*:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}\approx\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}. \qquad (3.3)$$

Запишем разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0

$$f(x_0 \pm \Delta x) = f(x_0) \pm \Delta x \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} + \left.\frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0} \pm \left.\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_{x_0} + \ldots . \quad (3.4)$$

Используя разностную аппроксимацию вперед, получаем

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} + \left.\frac{\Delta x}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0} + \left.\frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_{x_0} + \ldots . \quad (3.5а)$$

Второе, третье и последующие слагаемые в правой части (3.5а) представляют погрешности аппроксимации для $\Delta x \neq 0$. Аналогично для аппроксимации назад

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} - \left.\frac{\Delta x}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0} + \left.\frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_{x_0} + \ldots . \quad (3.5б)$$

Складывая равенства (3.5а) с (3.5б), будем иметь выражение для центрально-разностной аппроксимации

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} + \left.\frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_{x_0} + \ldots . \quad (3.5в)$$

Видно, что погрешность конечно-разностной аппроксимации (3.5а), (3.5б) – порядка Δx, а для центрально-разностной аппроксимации, существенно меньше, поскольку $\Delta x < 1$. Эту погрешность называют *погрешностью дискретизации*.

При решении с помощью МКР волновых уравнений, уравнений Лапласа, Пуассона необходима конечно-разностная аппроксимация вторых производных $\left(d^2 f / dx^2\right)$. Обратимся к рис. 3.1 и используем разложение в ряд Тейлора (3.4), располагая тремя точками x_0, $x_0 + \Delta x$ и $x_0 - \Delta x$.

$$f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) = 2f(x_0) + (\Delta x)^2 \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0} + 2\left.\frac{(\Delta x)^4}{4!}\frac{d^4 f}{dx^4}\right|_{x_0} + \ldots,$$

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} - \left.\frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{d^4 f}{dx^4}\right|_{x_0} + \ldots \approx \quad (3.6а)$$

$$\approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2},$$

т.е. погрешность аппроксимации – порядка $(\Delta x)^2 - O(\Delta x)^2$. Аналогично $d^2 f / dy^2$ для функции двух переменных $f(x, y)$

$$\left.\frac{d^2 f}{dy^2}\right|_{x_0} \approx \frac{f(y_0 + \Delta y) - 2f(y_0) + f(y_0 - \Delta y)}{(\Delta y)^2}. \quad (3.6б)$$

3.2. Конечно-разностная аппроксимация уравнений Лапласа и Пуассона

Проиллюстрируем процедуру конечно-разностной аппроксимации на примере решения *основных двумерных уравнений электростатики* (1.27), (1.29) конечно-разностным методом

$$\nabla^2 u = \rho(x, y) \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{\partial^2 u}{dy^2} = \rho(x, y). \quad (3.7)$$

Запишем конечно-разностную аппроксимацию (3.7), используя формулы (3.6) и ориентируясь на рис. 3.2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_1 - 2u_0 + u_3}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \ldots, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_2 - 2u_0 + u_4}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \ldots \quad (3.8)$$

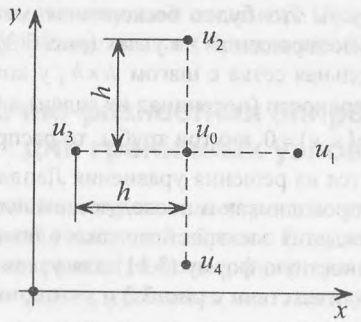


Рис. 3.2. Геометрия узлов в квадратной сетке

Складывая выражения в равенствах (3.8), используя уравнение (3.7) и умножая на h^2, получим

$$u_0 = \frac{1}{4}\left(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - \rho(x_0, y_0)h^2\right) - \frac{h^4}{48}\left(\frac{\partial^4 u}{dx^4} + \frac{\partial^4 u}{dy^4}\right) + \ldots \quad (3.9)$$

Таким образом, мы аппроксимировали значение функции в центральном узле первым слагаемым в выражении (3.9); второе слагаемое – погрешность аппроксимации $O(h^4)$

$$u_0 \approx \frac{1}{4}\left(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - \rho(x_0, y_0)h^2\right). \qquad (3.10)$$

Уравнение (3.10) может быть записано для любого узла (i, j) анализируемой области как

$$u(i,j) \approx \frac{1}{4}\left[u(i+1,j) + u(i,j+1) + u(i-1,j) + u(i,j-1) - \rho(x_0, y_0)h^2\right]. \qquad (3.11)$$

Уравнение (3.11) – *основное конечно-разностное уравнение* для решения уравнения Пуассона (Лапласа). Его также называют пятиточечной конечно-разностной аппроксимацией обсуждаемых уравнений. Записывая выражение (3.11) для каждого узла анализируемой области и преобразуя эти уравнения, можно получить совместную систему уравнений относительно значений функции $u(x, y)$ в узлах сетки, решить ее и найти эти значения. Особенности учета граничных условий, неоднородности среды в области анализа и другие моменты будут обсуждены ниже.

Рассмотрим конечно-разностный метод решения уравнения (3.7) на основе конечно-разностного уравнения (3.11), конкретизировав область решения, – пусть это будет бесконечная металлическая труба (двумерная задача), изолированная на углах (рис. 3.3) [21]. Внутри трубы введена прямоугольная сетка с шагом $h \times h$, у которой 14 фиксированных узлов на поверхности (потенциал их задан) и 9 свободных узлов внутри. Поскольку $\rho(x, y) = 0$ внутри трубы, то распределение электрического поля находится из решения уравнения Лапласа (1.32) с граничными условиями на проводниках и последующим использованием формулы (1.26) для нахождения электростатического поля.

Используем разностную форму (3.11) для узлов и значений потенциала на границе в соответствии с рис. 3.3 и учтем, что из-за симметрии области относительно оси y $u_1 = u_3$, $u_4 = u_6$ и $u_7 = u_9$. В результате получаем систему

$$\begin{aligned}
4u_1 &= 0 + V_0 + u_2 + u_4, & 4u_5 &= u_4 + u_4 + u_4 + u_8,\\
4u_2 &= u_1 + V_0 + u_1 + u_5, & 4u_7 &= 0 + u_1 + u_8 + 0,\\
4u_4 &= 0 + u_1 + u_5 + u_7, & 4u_8 &= u_7 + u_5 + u_7 + 0,
\end{aligned} \qquad (3.12)$$

которую можно представить в следующей матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.13)$$

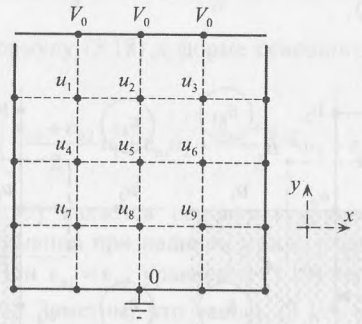


Рис. 3.3. Геометрия задачи

Решив систему (3.13), найдем соответствующие значения потенциалов u_i, а по формуле (1.26) и вектор напряженности электростатического поля. Заметим, что матрица в системе (3.13) является разряженной с доминантной главной диагональю (Приложение 2).

3.3. Конечно-разностная аппроксимация для граничных узлов

Рассматриваемый метод позволяет решать задачи для неоднородных сред и со сложной геометрией области. В частности, узлы сетки могут располагаться на границе раздела сред, на краях, в различных углах и т.д. Конечно-разностные уравнения для таких узлов отличаются от внутренних.

Узлы на границе раздела сред. Такие узлы встречаются при исследовании полосковых и микрополосковых линий передачи, частично заполненных волноводов и т.д. На рис. 3.4,*а* показана граница раздела двух сред с параметрами ε_{a1} и ε_{a2}. Получим конечно-разностное уравнение для центрального узла с потенциалом u_0. Полагая, что на границе отсутствуют электрические заряды, воспользуемся уравнением (1.8г),

применив его к пунктирной ячейке (задача двумерная) на рис. 3.4,*а*, ограниченной контуром **C**

$$-\oint_C \varepsilon_a \nabla u \mathbf{dc} = 0, \tag{3.14}$$

$\mathbf{dc} = \mathbf{n}dc$ – нормаль к контуру **C**; при этом мы воспользовались формулой (1.26): $\mathbf{E} = -\nabla u$. Формулу (3.14) можно переписать в виде

$$-\oint_C \varepsilon_a \frac{\partial u}{\partial n} dc = 0. \tag{3.15}$$

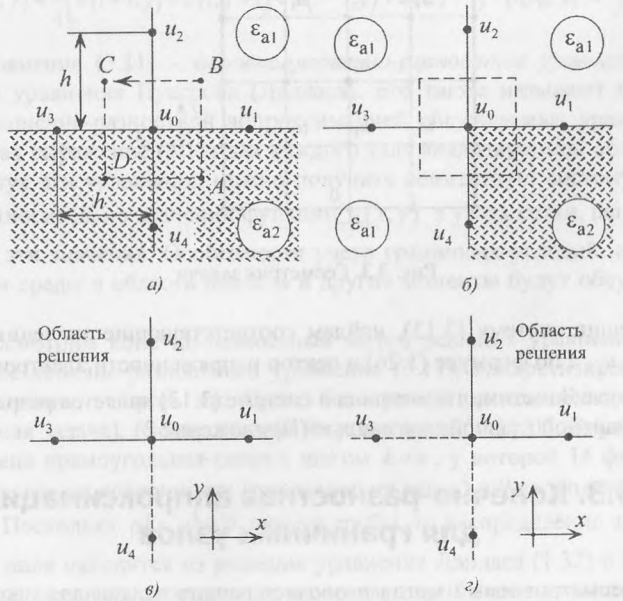


Рис. 3.4. Конечно-разностная аппроксимация для граничных узлов

Поток (3.15) вычисляется по четырем участкам. Потоки Ψ_{AB} и Ψ_{CD} соответственно равны

$$\Psi_{AB} = \varepsilon_{a1}\frac{u_1 - u_0}{h}\frac{h}{2} + \varepsilon_{a2}\frac{u_1 - u_0}{h}\frac{h}{2},$$
$$\Psi_{CD} = \varepsilon_{a1}\frac{u_3 - u_0}{h}\frac{h}{2} + \varepsilon_{a2}\frac{u_3 - u_0}{h}\frac{h}{2}. \tag{3.16}$$

Аналогично потоки Ψ_{BC} и Ψ_{DA} соответственно равны

$$\Psi_{BC} = \varepsilon_{a1}\frac{u_2 - u_0}{h}h, \quad \Psi_{DA} = \varepsilon_{a2}\frac{u_4 - u_0}{h}h. \tag{3.17}$$

Тогда полный поток (3.15) равен

$$\varepsilon_{a1}\frac{u_1 - u_0}{h}\frac{h}{2} + \varepsilon_{a2}\frac{u_1 - u_0}{h}\frac{h}{2} + \varepsilon_{a1}\frac{u_3 - u_0}{h}\frac{h}{2} +$$
$$+\varepsilon_{a2}\frac{u_3 - u_0}{h}\frac{h}{2} + \varepsilon_{a1}\frac{u_2 - u_0}{h}h + \varepsilon_{a2}\frac{u_4 - u_0}{h}h = 0. \tag{3.18}$$

Перепишем формулу (3.18) в форме основного разностного уравнения

$$\frac{\varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2}}{2}u_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2}}{2}u_1 + \varepsilon_{a1}u_2 + \frac{\varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2}}{2}u_3 + \varepsilon_{a2}u_4\right). \tag{3.19}$$

Выражение (3.19) является основным уравнением центрально-разностной аппроксимации при наличии узлов, расположенных на границе раздела сред. При $\varepsilon_{a1} = \varepsilon_{a2}$ уравнение (3.19) переходит для уравнения Лапласа в (3.10). Заметим, что запись (3.19) очевидным образом следует из выражения (3.10), если брать среднее значение диэлектрических проницаемостей сред $(\varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2})/2$ для узлов u_1, u_3, расположенных на границе раздела.

Узлы с диэлектрической угловой неоднородностью. Используя изложенную выше процедуру, можно получить основное уравнение центрально-разностной аппроксимации при наличии узлов, расположенных на границе с диэлектрической угловой неоднородностью (рис. 3.4,*б*).

$$\frac{3\varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2}}{4}u_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2}}{2}u_1 + \varepsilon_{a1}u_2 + \varepsilon_{a1}u_3 + \varepsilon_{a2}\frac{\varepsilon_{a1} + \varepsilon_{a2}}{2}u_4\right). \tag{3.20}$$

Узлы на границе области анализа. Такая ситуация встречается, когда узлы 0, 1 и 3 (рис. 3.4,*в*) лежат на границе области анализа, а узел 4 неизвестен, поскольку не принадлежит области анализа. В этом случае для нахождения u_4 используют условие $\partial u/\partial n = \partial u/\partial y = (u_2 - u_4)/2\Delta y$, где n – направление нормали к границе, соединяющей узлы 0, 1 и 3. Откуда $u_4 = -2\Delta y(\partial u/\partial y)_{1,3} + u_2$ и, подставляя это выражение в (3.10), получим следующее аппроксимирующее значение функции в центральном узле на границе:

$$u_0 = \frac{1}{4}\left[u_1 + 2u_2 + u_3 - 2\Delta y(\partial u/\partial y)_{1,3}\right], \tag{3.21}$$

которое в случае однородного условия Неймана на границе принимает вид

$$u_0 = \frac{1}{4}(u_1 + 2u_2 + u_3). \qquad (3.22)$$

При иной ориентации границы уравнение (3.21) получается очевидной перестановкой. Однородное граничное условие Неймана используется также для уменьшения размерности задачи путем введения магнитных или электрических стенок при наличии симметрии задачи.

Узлы на углах области анализа. Для угловых относительно области анализа узлов (рис. 3.4,*г*) основное уравнение центрально-разностной аппроксимации запишем как

$$u_0 = \frac{1}{4}\left[u_1 + u_2 + u_3 - 2\Delta y(\partial u/\partial y)_{0,1} - 2\Delta x(\partial u/\partial x)_{0,2}\right], \qquad (3.23)$$

и для однородных граничных условий Неймана

$$u_0 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2). \qquad (3.24)$$

Криволинейная граница. Конечно-разностный метод основан на дискретизации уравнений с использованием узлов регулярной сетки. Для расчета методом конечных разностей областей со сложной геометрией без потери точности необходимо трансформировать дискретизацию (3.9), усложнив связь между узлами (рис. 3.5).

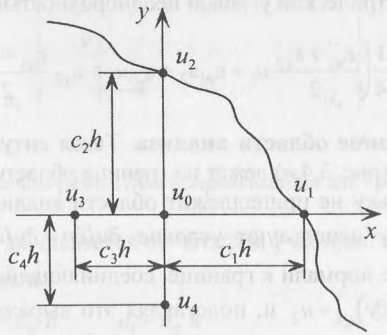


Рис. 3.5. К трансформации сетки для узлов на криволинейной границе

3.4. Анализ СВЧ-структур методом конечных разностей

Проиллюстрируем метод конечных разностей на простейших примерах.

3.4.1. Определение емкости линии из двух неоднородно заполненных пластин

Геометрия задачи представлена на рис. 3.6. Нижняя пластина заземлена, а потенциал верхней равен 1 В. Структура предполагается однородной вдоль оси *OZ* и ограниченной в поперечном сечении идеально проводящими магнитными стенками ($\mathbf{H}_\tau = 0$ $(\partial \mathbf{E}_\tau/\partial n = 0)$), что необходимо для ограничения числа узлов сетки.

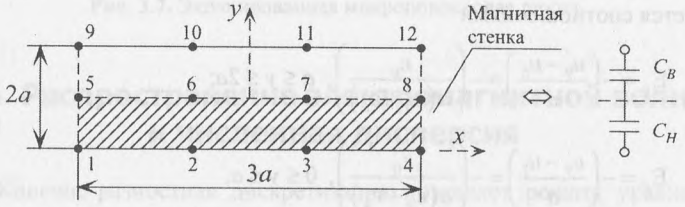


Рис. 3.6. Линия из двух неоднородно заполненных пластин

Для МКР-анализа область решения разбивают на прямоугольные ячейки, для которых $\Delta x = \Delta y = h$. Граничные условия на верхней и нижней пластинах имеют вид $u_9 = u_{10} = u_{11} = u_{12} = 1\,\text{В}$; $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$; неизвестными потенциалами являются u_5, u_6, u_7, u_8, а из симметрии структуры относительно оси *Y* следует, что $u_5 = u_8$, $u_6 = u_7$. Тогда, используя конечно-разностную аппроксимацию для узлов на границе раздела сред (3.19) и для узлов на границе области анализа с условием Неймана ($\partial u/\partial n = 0$) (3.21), запишем для потенциала в точках 5 и 6:

$$\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_a}{2} u_6 = \frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_a}{2} u_5 + \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_a}{2} u_7 + \varepsilon_0 u_{10} + \varepsilon_a u_2\right), \qquad (3.25)$$

$$\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_a}{2} u_5 = \frac{1}{4}\left(\varepsilon_a u_1 + 2\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_a}{2} u_6 + \varepsilon_0 u_9\right). \qquad (3.26)$$

Учитывая симметрию и граничные условия из выражений (3.25), (3.26) получаем

$$u_5 = u_6 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon_a} = u_7 = u_8 . \qquad (3.27)$$

Чтобы определить погонную емкость C_0 (емкость на единицу длины линии), найдем энергию электрического поля (1.34)

$$W^э = \frac{1}{2} C_0 V^2 = \frac{1}{2} \int \varepsilon |\nabla u|^2 \, ds \frac{1}{2} \int \varepsilon_a |\mathbf{E}|^2 \, ds , \qquad (3.28)$$

где интегрирование осуществляется по поперечному сечению линии. Электрическое поле задается соотношением

$$\mathrm{E}_y(y) = -\left(\frac{u(y+\Delta y) - u(y)}{\Delta y} \right), \text{ В/м.} \qquad (3.29)$$

Соответственно для двух областей на рис. 3.6 электрическое поле задается соотношениями

$$\mathrm{E}_y = -\left(\frac{u_9 - u_5}{a} \right) = -\left(\frac{\varepsilon_a}{a(\varepsilon_0 + \varepsilon_a)} \right), \; a \le y \le 2a; \qquad (3.30)$$

$$\mathrm{E}_y = -\left(\frac{u_9 - u_1}{a} \right) = -\left(\frac{\varepsilon_0}{a(\varepsilon_0 + \varepsilon_a)} \right), \; 0 \le y \le a,$$

подставляя которые в равенство (3.28) и интегрируя, находим

$$W^э = \frac{1}{2} C_0 V^2 = W^э_{\varepsilon_0} + W^э_{\varepsilon_a} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_a}{\varepsilon_0 + \varepsilon_a} . \qquad (3.31)$$

Откуда при $V = 1$ В получаем следующее выражение для емкости:

$$C_0 = \frac{3\varepsilon_0 \varepsilon_a}{\varepsilon_0 + \varepsilon_a} . \qquad (3.32)$$

3.4.2. Определение характеристического импеданса и фазовой скорости экранированной микрополосковой линии

Экранированная микрополосковая линия представлена на рис. 3.7. Экранирование осуществлено для ограничения области решения. Рассмотренный выше подход можно использовать для вычисления характеристического импеданса Z и фазовой скорости υ_ϕ основной волны (Т-волны) экранированной микрополосковой линии на основе соотношений (1.59):

$$\upsilon_\phi = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{\varepsilon}}; \quad Z = \frac{1}{\upsilon C} = \frac{1}{\upsilon_0 \sqrt{C C_0}}; \quad \varepsilon = \frac{C}{C_0} , \qquad (3.33)$$

где C_0, C – погонные емкости линии в свободном пространстве и на подложке (рис. 3.7).

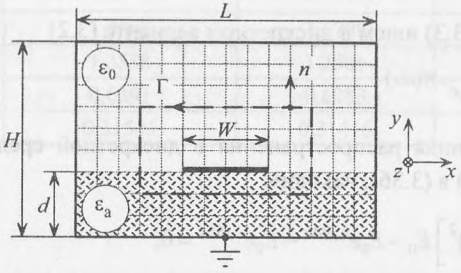


Рис. 3.7. Экранированная микрополосковая линия

3.5. Распространение электромагнитной волны и численная дисперсия

Конечно-разностная дискретизация позволяет решать уравнения численно, однако вносит погрешности, связанные с дискретизации функции. Кроме того, когда МКР используется для решения задач распространения волн, возникает явление *численной дисперсии*, т.е. зависимости постоянной распространения от частоты, хотя среда распространения бездисперсионная. Для пояснения этого явления обратимся к волновому уравнению (1.45) и запишем его для простейшего случая

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + k_0^2 E_y(x) = 0 , \qquad (3.34)$$

решение которого имеет форму бегущей волны

$$E_y(z) = E_0 e^{\pm j k_0 x} . \qquad (3.35)$$

Чтобы выявить численную дисперсию, дискретизируем (3.34), определим постоянную распространения k_0 и сравним с истинным значением. В результате применения центрально-разностной аппроксимации типа (3.6), (3.8) к (3.34) для однородной сетки, представленной на рис. 3.8, получаем

$$2E_y(i) - E_y(i-1) - E_y(i+1) - (k_0 \Delta x)^2 E_y(i) = 0 . \qquad (3.36)$$

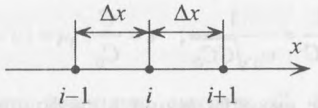


Рис. 3.8. Одномерная однородная сетка

Решение (3.3) ищем в дискретном варианте (3.2)

$$E_y(z) = E_0 e^{\pm j\beta(i\Delta x)}, \tag{3.37}$$

где β – постоянная распространения в дискретной среде. Подставляя равенство (3.37) в (3.36), находим

$$\left[2-(k_0\Delta x)^2\right]E_0 - E_0 e^{+j\beta\Delta x} - E_0 e^{-j\beta\Delta x} = 0,$$

или

$$\left[2-(k_0\Delta x)^2\right] = 2\cos(\beta\Delta x), \tag{3.38а}$$

или

$$\beta = \frac{1}{\Delta x}\cos^{-1}\left(1-\frac{(k_0\Delta x)^2}{2}\right). \tag{3.38б}$$

Выражения (3.37) и (3.38б) являются численным решением распространения плоской волны в направлении оси X (см. рис. 3.8), задаваемой бесконечной однородной сеткой. Видно, что численный коэффициент распространения β отличается от коэффициента распространения k_0 и зависит от шага Δx и $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ (длины волны λ_0); если $\Delta x \to 0$, то $\beta \to k_0$. Из выражений (3.38) следует, что в среде без потерь β является действительной величиной при условии $\cos(\beta\Delta x) \le -1$ или

$$k_0\Delta x \le 2. \tag{3.39}$$

Следовательно, если размеры ячейки меньше $\Delta x \cong \lambda_0/\pi$, то погрешность численного решения связана с фазовой ошибкой Φ, которая на единичную ячейку равна

$$\Phi = (k_0 - \beta)\Delta x. \tag{3.40}$$

В таблице приведена фазовая ошибка на длину волны Φ_{λ_0} в функции $\Delta x/\lambda_0$. Видно, что $\beta > k_0$, и это соотношение не зависит от размера

ячеек. Фазовая погрешность уменьшается как $(\Delta x)^2$. Так $\Phi_{\lambda_0} = -6{,}19°$ при $\Delta x = \lambda_0/10$ и снижается примерно на 1/4 при уменьшении размера ячейки вдвое. Погрешность составляет менее 1 % для $\Delta x/\lambda_0 < 0{,}055$.

$\Delta x/\lambda_0$	$\beta\Delta x$, рад	$k\Delta x$, рад	Φ_{λ_0}, градус
1/4	1,8067	1,5708	–54,06
1/5	1,3588	1,2566	–29,27
1/10	0,6391	0,6283	–6,19
1/20	0,31546	0,31416	–1,49

— ГЛАВА 4 —

Метод конечных разностей во временной области

Метод конечных разностей во временной области – КРВО достаточно прост при формулировке, сеточной дискретизации и реализации, легко учитывает анизотропные и неоднородные материалы [29, 30, 21]. Эффективность метода обусловлена отсутствием матричных уравнений и возможностью за один проход с помощью фурье-преобразования проанализировать характеристики в полосе частот. Возможна иллюстрация процесса распространения электромагнитной волны в пространстве с течением времени, т.е. создавать *анимацию*. Некоторые базовые положения метода КРВО, такие как отражение, согласование импедансов, распределение поля, могут быть хорошо поняты из достаточно простой модели – распространения волны в линии передачи.

Сделаем некоторое уточнение. С электродинамической точки зрения все линии передачи можно разбить на две основные группы. К первой группе относятся линии передачи, подчиняющиеся телеграфным уравнениям, в которых электромагнитное поле явно не фигурирует, а вместо него для каждого поперечного сечения данной линии передачи в каждый момент времени вводятся две величины: напряжение и ток. Линии передачи первой группы имеют две и более проводящие поверхности (двухпроводная линия, коаксиальный кабель, экранированная двухпроводная линия). Сюда же можно отнести линии передачи (полосковая, щелевая и т.п.), для которых основная волна рассчитывается в первом приближении как Т-волна. Ко второй группе относят линии, которые рассчитываются чисто электродинамическими методами (металлические волноводы, полосковая и щелевая линии без приближения и т.д.).

4.1. Распространение импульса в линии передачи

Пусть линия передачи однородная, ее импеданс (характеристическое сопротивление) – Z_0 и фазовая скорость в линии – υ_p. Потери в

линии передачи отсутствуют, и υ_p не зависит от частоты. Пусть на вход линии передачи в момент времени $t = 0$ подается импульс длительностью Δt, как показано на рис. 4.1,*а*.

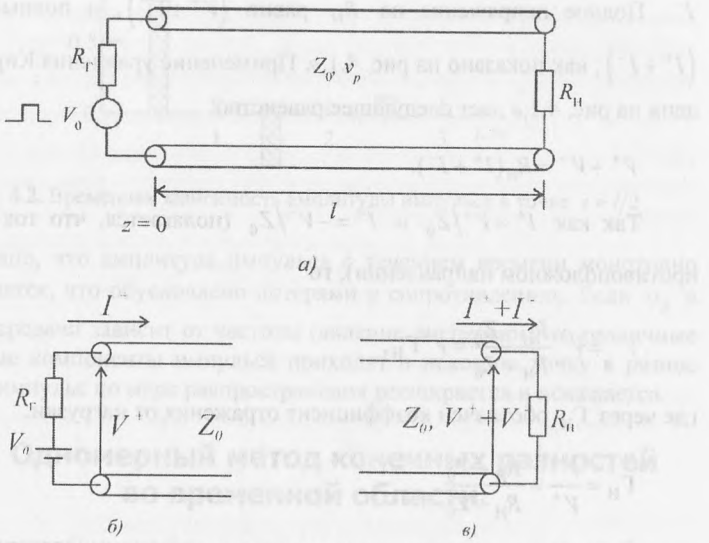


Рис. 4.1. Передающая линия (*а*) и эквивалентные схемы (*б*), (*в*)

Импульс распространяется вдоль линии от генератора с внутренним сопротивлением $R_Г$ к нагрузке с сопротивлением $R_Н$. Пусть при $z = 0$ амплитуда напряжения импульса V^+, а тока – I^+. Эти величины могут быть определены из сосредоточенной цепи (рис. 4.1,*б*), на которой не показана $R_Н$, поскольку в момент времени $t = 0$ импульс нагрузки еще не достиг.

Это принципиальное отличие линии передачи (длинной линии) от цепи со сосредоточенными параметрами, в которой предполагается мгновенное ее заполнение. Применение уравнения Кирхгофа к цепи на рис. 4.1,*б* дает равенство

$$V^+ = V_0 - I^+ R_Г. \tag{4.1}$$

Поскольку $I^+ = V^+ / Z_0$, то

$$V^+ = V_0 \frac{Z_0}{R_Г + Z_0}, \quad I^+ = \frac{V^+}{Z_0} = \frac{V_0}{R_Г + Z_0}. \tag{4.2}$$

Волна с амплитудой V^+ распространяется со скоростью υ_p к нагрузке R_H, которую достигает в момент времени $t = l/\upsilon_p$, и отражается от нее. Пусть амплитуда напряжения отраженного импульса V^-, а тока – I^-. Полное напряжение на R_H равно $\left(V^+ + V^-\right)$, и полный ток – $\left(I^+ + I^-\right)$, как показано на рис. 4.1,*в*. Применение уравнения Кирхгофа к цепи на рис. 4.1,*в* дает следующее равенство:

$$V^+ + V^- = R_{\text{Н}}(I^+ + I^-). \tag{4.3}$$

Так как $I^+ = V^+/Z_0$ и $I^- = -V^-/Z_0$ (полагается, что ток течет в противоположном направлении), то

$$V^- = V^+ \frac{R_{\text{Н}} - Z_0}{R_{\text{Н}} + Z_0} = V^+ \Gamma_{\text{Н}}, \tag{4.4}$$

где через $\Gamma_{\text{Н}}$ обозначен коэффициент отражения от нагрузки:

$$\Gamma_{\text{Н}} = \frac{V^-}{V^+} = \frac{R_{\text{Н}} - Z_0}{R_{\text{Н}} + Z_0}. \tag{4.5}$$

Отраженная волна распространяется в сторону генератора и отражается от него с коэффициентом отражения

$$\Gamma_{\text{Г}} = \frac{R_{\text{Г}} - Z_0}{R_{\text{Г}} + Z_0}. \tag{4.6}$$

Этот процесс переотражения продолжается непрерывно во времени, пока не затухает из-за потерь в сопротивлениях $R_{\text{Н}}$ и $R_{\text{Г}}$. Проиллюстрируем рассмотренный процесс при распространении импульса шириной $\Delta t = 100$ пс, полагая, что линия без дисперсии и $l/\upsilon_p = 1$ нс. Остальные параметры: $Z_0 = 50$ Ом, $R_{\text{Н}} = 30$ Ом, $R_{\text{Г}} = 20$ Ом и $V_0 = 2$ В. Тогда $\Gamma_{\text{Н}} = -0{,}250$, $\Gamma_{\text{Г}} = -0{,}429$ и $V^+ = 1{,}429$ В. Представим на рис. 4.2 зависимость амплитуды импульса в точке $z = l/2$ как функцию времени. Падающий импульс с амплитудой 1,429 В достигнет этой точки через $t = 0{,}5$ нс. После отражения от нагрузки импульс с амплитудой $\Gamma_{\text{Н}} V^+ = -0{,}357$ В дойдет до точки $z = l/2$ в момент времени $t = 1{,}5$ нс. Данный импульс отражается от источника и достигает искомой точки в момент времени $t = 2{,}5$ нс с амплитудой $\Gamma_{\text{Г}}\Gamma_{\text{Н}} V^+ = 0{,}429 \times 0{,}357$ В $= 0{,}153$ В.

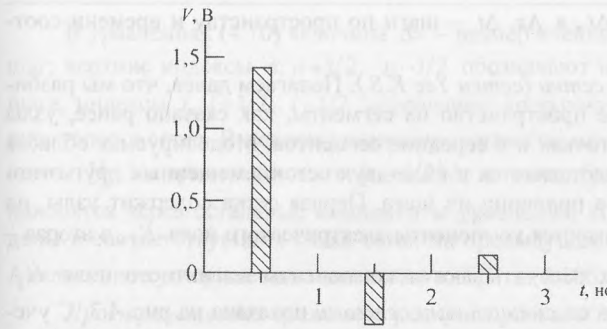


Рис. 4.2. Временная зависимость амплитуды импульса в точке $z = l/2$

Видно, что амплитуда импульса с течением времени монотонно уменьшается, что обусловлено потерями в сопротивлениях. Если υ_p в линии передачи зависит от частоты (явление дисперсии), то различные частотные компоненты импульса приходят в искомую точку в разное время и импульс по мере распространения расширяется и искажается.

4.2. Одномерный метод конечных разностей во временной области

Проанализируем теперь распространение волны на языке метода КРВО.

4.2.1. Алгоритм одномерного метода

Для простоты будем полагать, что плоская волна (Т-волна) распространяется вдоль оси x в однородной среде. Тогда в соответствии с формулами (1.7а), (1.7б), поскольку $\partial/\partial y = 0, \partial/\partial z = 0$, имеем

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \text{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \text{H}_z}{\partial x}, \quad \mu_0 \frac{\partial \text{H}_z}{\partial t} = -\frac{\partial \text{E}_y}{\partial x}. \tag{4.7}$$

Выразим производные в уравнениях (4.7) в терминах центрально-разностной аппроксимации (3.3)

$$\left.\frac{\text{d}f}{\text{d}\varphi}\right|_{\varphi_0} = \left.\frac{f(\varphi_0 + \Delta\varphi/2) - f(\varphi_0 - \Delta\varphi/2)}{\Delta\varphi}\right|_{\Delta\varphi \to 0} + \text{O}(\Delta\varphi)^2. \tag{4.8}$$

Для применения выражений (4.8) к (4.7) предположим, что E_y и H_z заданы в пространстве и во времени в дискретных точках (x_i, t_n),

где $x_i = i\Delta x, t_n = n\Delta t$, а Δx, Δt – шаги по пространству и времени соответственно.

Смещенные сетки (сетки Yee K.S.). Полагаем далее, что мы разбили анализируемое пространство на сегменты, как сказано ранее, узлы взяты в краевых точках и в середине сегментов. Моделируемая область пространства представляется в виде двух сеток, смещенных друг относительно друга на половину их шага. Первая сетка содержит узлы, на которых рассчитываются компоненты электрического поля E_y, а вторая – узлы, на которых рассчитываются компоненты магнитного поля H_z. Данная процедура со *смещенными сетками* показана на рис. 4.3. С учетом сказанного применим формулы (4.8) к первому уравнению (4.7) для сетки $x_i = i\Delta x$, $t_n = (n+1/2)\Delta t$:

$$\frac{E_y^{n+1}(i) - E_y^n(i)}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{H_z^{n+1/2}(i+1/2) - H_z^{n+1/2}(i-1/2)}{\Delta x}. \qquad (4.9а)$$

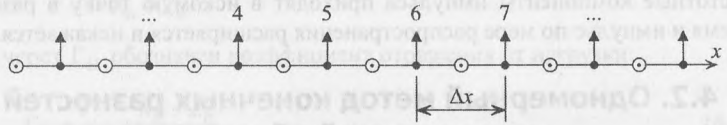


Рис. 4.3. Одномерные смещенные сетки *Yee*:
E_y – ↑; H_z – ⊙

Подобная аппроксимация называется *аппроксимацией со смещенной сеткой.* Используя равенства (4.8) во втором уравнении (4.7) для смещенной на половину шага сетки $x_i = (i+1/2)\Delta x$, $t_n = n\Delta t$, получим

$$\frac{H_z^{n+1/2}(i+1/2) - H_z^{n-1/2}(i+1/2)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{E_y^n(i+1) - E_y^n(i)}{\Delta x}. \qquad (4.9б)$$

Видно, что электрическое поле рассчитывается в моменты времени $n\Delta t$, а магнитное – $(n+1/2)\Delta t$, т.е. расчет полей также чередуется во времени. Уравнения (4.9) запишем в виде алгоритма

$$H_z^{n+1/2}(i+1/2) = H_z^{n-1/2}(i+1/2) - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x}\left[E_y^n(i+1) - E_y^n(i)\right], \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad (4.10а)$$

$$E_y^{n+1}(i) = E_y^n(i) - \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \Delta x}\left[H_z^{n+1/2}(i+1/2) - H_z^{n+1/2}(i-1/2)\right], \; i = 1, 2, \ldots \qquad (4.10б)$$

В уравнениях (4.10) величина Δx – размер ячейки, Δt – временной шаг; верхние индексы n, $n+1/2$, $n-1/2$ обозначают номер временного шага, индексы i, $i+1/2$, $i-1/2$ определяют координаты соответствующих узлов в сетке. В первом уравнении неизвестными являются компоненты H_z на временном шаге $(n+1/2)\Delta t$ в узлах $(i+1/2)\Delta x$, которые находятся через остальные компоненты уравнения, которые были найдены в соответствующих узлах сеток на предыдущем временном шаге. Аналогичное утверждение относится и к E_y^{n+1} в (4.10б).

Пространственно-временное распространение поля. Таким образом, попеременно определяя приращения электрических и магнитных компонент на каждом временном шаге, получаем модель распространения поля в пространстве сеток, что показано на рис. 4.4 [21].

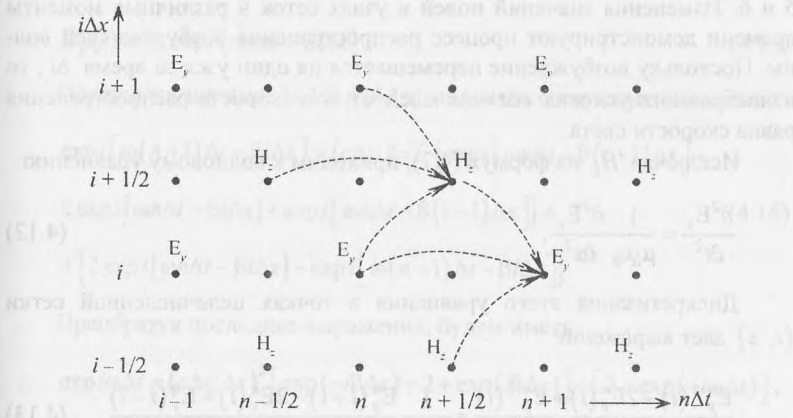


Рис. 4.4. Модель распространения поля в пространстве сеток

Рассмотрим процесс пространственно-временного распространения поля для сеток на рис. 4.4, положив для простоты $\Delta x = 1$ мм, $c\Delta t = \Delta x$. Тогда

$$H_z^{n+1/2}(i+1/2) = H_z^{n-1/2}(i+1/2) - \frac{1}{120\pi}\left[E_y^n(i+1) - E_y^n(i)\right], \; i = 1, 2, \ldots, \qquad (4.11а)$$

$$E_y^{n+1}(i) = E_y^n(i) - 120\pi\left[H_z^{n+1/2}(i+1/2) - H_z^{n+1/2}(i-1/2)\right], \quad i = 1, 2, \ldots. \qquad (4.11б)$$

Предполагаются следующие начальные условия: $E_y^0(i) = 0$, $H_z^0(i) = 0$, и условия возбуждения: $E_y^0(5) = 1$, $E_y^0(6) = 1$. В соответствии с этими данными, находим значения в различных узлах ($\eta = 120\pi$ Ом) (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Время	Узлы										
	3	3½	4	4½	5	5½	6	6½	7	7½	8
$n=0$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
$n=1/2\left(H_z^{n+1/2}\right)$	–	0	–	$-1/\eta$	–	0	–	$1/\eta$	–	0	–
$n=1\left(E_y^{n+1}\right)$	0	–	1	–	0	–	0	–	1	–	0
$n=1\frac{1}{2}$	–	$-1/\eta$	–	0	–	0	–	0	–	$1/\eta$	–
$n=2$	1	–	0	–	0	–	0	–	0	–	1

Возбуждение в начальный момент времени сосредоточено в узлах 5 и 6. Изменения значений полей в узлах сеток в различные моменты времени демонстрируют процесс распространения возбуждающей волны. Поскольку возбуждение перемещается на один узел за время Δt, то из выбранного условия $c\Delta t = \Delta x$ следует, что скорость распространения равна скорости света.

Исключая H_z из формул (4.7), приходим к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathrm{E}_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 \mathrm{E}_y}{\partial x^2}. \tag{4.12}$$

Дискретизация этого уравнения в точках целочисленной сетки $(t,\ x)$ дает выражение

$$\frac{\mathrm{E}_y^{n+1}(i) - 2\mathrm{E}_y^n(i) + \mathrm{E}_y^{n-1}(i)}{(\Delta t)^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\mathrm{E}_y^n(i+1) - 2\mathrm{E}_y^n(i) + \mathrm{E}_y^n(i-1)}{(\Delta x)^2}, \tag{4.13}$$

при этом в левой и правой частях опущены слагаемые погрешности аппроксимации $\mathrm{O}\left[(\Delta t)^2\right]$ и $\mathrm{O}\left[(\Delta x)^2\right]$ соответственно. Решения данного уравнения и уравнений (4.10) равнозначны по стабильности и влиянию численной дисперсии.

4.2.2. Выбор пространственного шага и явление численной дисперсии

Прежде чем использовать алгоритм метода КРВО необходимо рассмотреть такие важные вопросы, как выбор пространственного и временного шагов, источников возбуждения, поглощающих граничных условий и стабильность решения. В п. 3.5 мы обсудили влияние пространственного шага Δx на точность решения и явление численной дисперсии. В методе КРВО численная дисперсия зависит также и от Δt. Рассмотрим простейший случай волнового уравнения (4.12) и его решение в виде бегущей волны с постоянной распространения $k_0 = \omega/c$:

$$\mathrm{E}_y(x,\ t) = \exp i(\omega t - k_0 x), \tag{4.14}$$

при этом через k_0 определяются: фазовая скорость волны $\upsilon_p = \omega/k_0$, групповая скорость $\upsilon_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k_0$ и длина волны $\lambda_g = 2\pi/k_0$. Чтобы выявить численную дисперсию, используем центрально-разностную аппроксимацию (4.13), определим постоянную распространения β и сравним с истинным значением k_0. Для этого запишем дискретизированную версию уравнения (4.14) в пространственно-временной точке (x_i, t_n)

$$\mathrm{E}_y^n(i) = \mathrm{E}_0 \exp i(\omega n\Delta t - \beta i\Delta x). \tag{4.15}$$

Подставляя значение (4.15) в (4.13), получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}\exp i\left[\omega(n+1)\Delta t - \beta i\Delta x\right] &= (c\Delta t/\Delta x)^2 \left\{\exp i\left[\omega n\Delta t - \beta(i+1)\Delta x\right] - \right.\\ &2\exp i\left[\omega n\Delta t - \beta i\Delta x\right] + \exp i\left[\omega n\Delta t - \beta(i-1)\Delta x\right]\Big\} + \\ &+\left\{2\exp i\left[\omega n\Delta t - \beta i\Delta x\right] - \exp i\left[\omega(n-1)\Delta t - \beta i\Delta x\right]\right\}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Преобразуя последнее выражение, будем иметь

$$\exp i\omega\Delta t = (c\Delta t/\Delta x)^2\left[\exp(-i\beta\Delta x) - 2 + \exp(i\beta\Delta x)\right] + \left[2 - \exp(-i\omega\Delta t)\right],$$

или

$$\cos(\omega\Delta t) = (c\Delta t/\Delta x)^2[\cos(\beta\Delta x) - 1] + 1,$$

или

$$\sin(\omega\Delta t/2) = \pm(c\Delta t/\Delta x)\sin(\beta\Delta x/2). \tag{4.17}$$

Уравнение (4.17) связывает частоту с постоянной распространения и называется *дисперсионным уравнением*. Видно, что $\beta \to k_0 = \omega/c$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$, а также для случая $c\Delta t = \Delta x$ независимо от выбора Δt и Δx. Последнее соотношение носит название магического шага, поскольку при этом отсутствует эффект дисперсии, обусловленный численной дискретизацией.

Вводя обозначение $\tilde{\upsilon}_p = \omega/\beta$, из выражения (4.17) можно получить равенство

$$\frac{\upsilon_p}{c}=\frac{\pi\Delta x}{\lambda_0}\frac{1}{\arcsin\left[\sin\left(\pi\alpha\Delta x/\lambda_0\right)/\alpha\right]}, \qquad (4.18)$$

где $\alpha=c\Delta t/\Delta x$ – коэффициент стабильности; λ_0 – длина волны в свободном пространстве.

Зависимость фазовой скорости υ_p/c в функции размера ячейки $\Delta x/\lambda_0$ и параметром α представлена на рис. 4.5 (кривая точного решения соответствует $\alpha=1$).

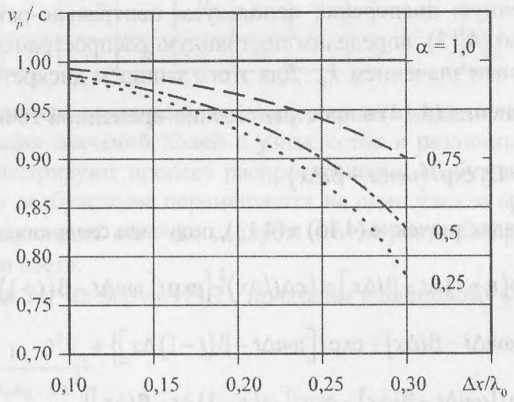


Рис. 4.5. Зависимость фазовой скорости от размера ячейки

Оценим фазовую ошибку, порождаемую численной дисперсией, полагая, что $\Delta x=\lambda_0/5$ и $\alpha=1/2$. В соответствие с уравнением (4.18) и рис. 4.5 находим $\upsilon_p/c=0{,}943$, это означает, что погрешность фазовой скорости β по сравнению со скоростью света равна –5,7 %. Если волна распространяется на расстояние $10\lambda_0$ (50 пространственных ячеек), то при $\upsilon_p/c=0{,}943$ она пробежит только 50x0.943=47.15 ячейки, что равносильно значительной фазовой ошибке $(50-47{,}15)\times 360°/5=205{,}2°$. Разумеется, можно снизить величину численной дисперсии, уменьшая размер ячеек или используя центрально-разностную аппроксимацию более высокого порядка, что приводит к существенному увеличению требований к вычислительным ресурсам. При распространении волны в среде следует учитывать ее электрофизические параметры. Компромиссом между точностью решения и требованиями к вычислительным ресурсам является непревышение размера ячейки $\lambda/10$ на максимальной частоте спектра сигнала (импульсного, сложно-модулированного). Для

достижения точности ~1 % следует уменьшить размер ячейки до $\lambda/20$, а для грубых расчетов можно использовать ячейку с размером $\lambda/5$.

4.2.3. Временной шаг и стабильность решения

После выбора пространственного размера ячейки Δx необходимо определить временной шаг для последовательной пространственно-временной трансформации электромагнитного поля. Минимальное время распространения волны между двумя последовательными узлами ячейки равно $\Delta t_{\min}=\Delta x/\upsilon_{\max}$, где $\upsilon_{\max}$ – максимальная фазовая скорость волны в области решения. Если выбрать $\Delta t>\Delta t_{\min}$, то расстояние, пробегаемое волной за время Δt, будет больше размера ячейки Δx, и, следовательно, теряется информация в узле, т.е. отсутствует причинная связь (связь поля в последующих пространственно-временных точках с предыдущими). Временной шаг следует выбирать из условия $\Delta t<\Delta x/\upsilon_{\max}$ (условие стабильности Куранта). Определив некоторый *запас стабильности* в соответствии с $\alpha=c\Delta t/\Delta x$, например $\alpha=1/2$, временной шаг выбираем из условия

$$\Delta t=(1/2)\,\Delta x/\upsilon_{\max}. \qquad (4.19)$$

Возбудим прямоугольный импульс длительностью $\tau=500$ пс в начальном узле $i=0$. Пространственная протяженность импульса равна $c\tau=3\times10^8\times500\times10^{-12}=0{,}15$ м, что для выбранного шага $\Delta x=1{,}5$ мм составляет 100 пространственных шагов. На рис. 4.6 показан прямоугольный импульс (пунктиром) после $n=250$ временных шагов распространения импульса (передний фронт) для $\alpha=1$ и сплошной линией для $\alpha=1/2$.

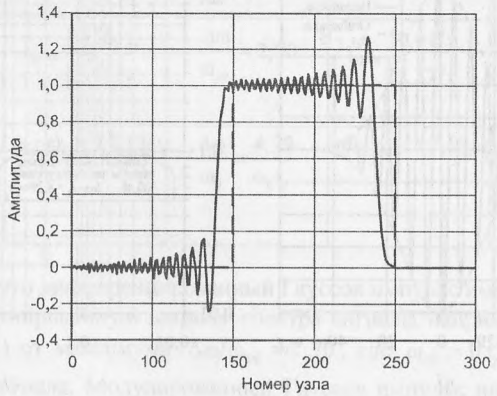


Рис. 4.6. Влияние численной дисперсии на форму импульса

4.2.4. Источники возбуждения

Временная форма сигнала. Для анализа в требуемой полосе частот СВЧ-устройств методом КРВО необходимо создавать специальный временной сигнал. Этот сигнал характеризует возбуждение или источник. Выбор возбуждающего сигнала зависит от особенностей применения. Например, для определения нижней частоты (по коэффициенту отражения) целесообразно использовать Гауссов импульс (нулевые частоты антенна не излучает):

$$f(t)=\exp\left[-\left(t/\tau_p\right)^2/2\right],\quad F(\omega)=\sqrt{2\pi}\tau_p\,\exp\left[-\left(\omega\tau_p\right)^2/2\right], \qquad (4.20)$$

где τ_p – характеристическое время. Форма импульса и его спектр представлены на рис. 4.7,*а,б*.

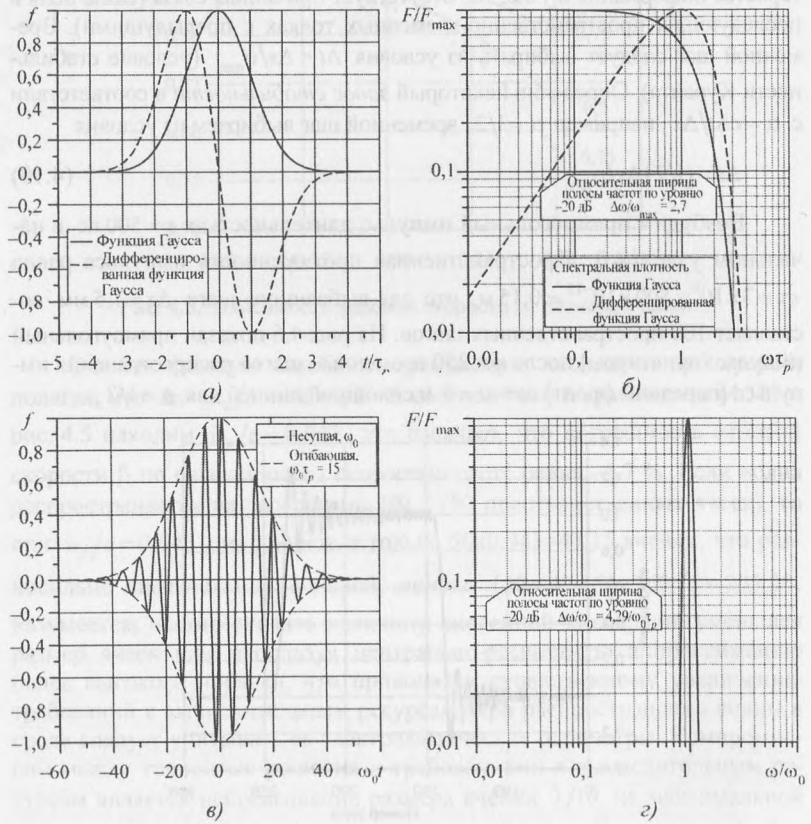


Рис. 4.7. Форма и спектр сигналов источника возбуждения

Когда интересуются характеристиками антенны в полосе частот, подходящим импульсом является дифференцированный Гауссов импульс (см. рис. 4.7,*а,б*)

$$f(t)=-\left(t/\tau_p\right)\exp\left\{-\left[\left(t/\tau_p\right)^2-1\right]/2\right\},$$
$$F(\omega)=i\sqrt{2\pi}\omega\tau_p^2\exp\left\{-\left[\left(\omega\tau_p\right)^2-1\right]/2\right\}, \qquad (4.21)$$

или амплитудно-модулированный синусоидой частоты ω_0 Гауссов импульс (рис. 4.7,*в,г*)

$$f(t)=\exp\left[-\left(t/\tau_p\right)^2/2\right]\sin\left(\omega_0 t\right),$$
$$F(\omega)=-i\sqrt{\pi/2}\tau_p\left(\exp\left\{-\left[\left(\omega-\omega_0\right)\tau_p\right)^2/2\right]\right\}- \qquad (4.22)$$
$$-\exp\left\{-\left[\left(\omega+\omega_0\right)\tau_p\right)^2/2\right]\right\}.$$

Некоторые характеристики этих сигналов приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Сигнал	Частота в спектре сигнала на уровне 10 % от максимума	Нормированная ширина спектра сигнала на уровне 10 % от максимума	Частота в спектре сигнала на уровне 1 % от максимума	Нормированная ширина спектра сигнала на уровне 1 % от максимума
Гауссов импульс	$\omega=2{,}15/\tau_p$		$\omega=3{,}03/\tau_p$	
Дифференцированный Гауссов импульс	$\omega=\begin{cases}0{,}06/\tau_p\\2{,}76/\tau_p\end{cases}$	$\frac{\Delta\omega}{\omega_{pk}}=2{,}70$	$\omega=\begin{cases}0{,}01/\tau_p\\3{,}57/\tau_p\end{cases}$	$\frac{\Delta\omega}{\omega_{pk}}=3{,}57$
Модулированный Гауссов импульс, $\omega_0\tau_p>>1$	$\omega-\omega_0=\pm 2.15/\tau_p$	$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{4{,}29}{\omega_0\tau_p}$	$\omega-\omega_0=\pm 3{,}03/\tau_p$	$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{6{,}07}{\omega_0\tau_p}$

Видно, что дифференцированный Гауссов импульс имеет достаточно большую нормированную ширину спектра сигнала, например, на уровне 10 % (–20 дБ) от максимума $\Delta\omega/\omega_{pk}\approx 2{,}70$, где $\omega_{pk}=1/\tau_p$ – частота в максимуме сигнала. Модулированный Гауссов импульс имеет управляемую нормированную ширину спектра сигнала, которая контролируется

параметром $\omega_0\tau_p$. Например, нормированная ширина спектра сигнала на уровне 10 % от максимума при $\omega_0\tau_p = 15$ равна $\Delta\omega/\omega_0 = 0{,}29$, т.е. существенно уже, чем полоса дифференцированного Гауссова импульса.

Дискретизированная версия сигнала (4.20), возбуждаемого в пространственном узле $i_s\Delta x$ со сдвинутым на $n_0\Delta t$ центром и длительностью импульса $n_{\tau_p}\Delta t$ имеет вид

$$f^n(i_s) = \mathrm{E}_y^n(i_s) = \exp\left[-\left(n - n_0/n_{\tau_p}\right)^2/2\right]. \qquad (4.23)$$

Возбуждение можно задавать не только точечным источником, как формуле (4.23), но и начальными условиями, что проиллюстрировано при распространении волны, задаваемой уравнениями (4.11) (табл. 4.1), при условии возбуждения $\mathrm{E}_y^0(5) = 1$, $\mathrm{E}_y^0(6) = 1$. Фактически такое возбуждение характеризует прямоугольный импульс шириной $2\Delta x$, дискретизированная версия которого в момент $t = 0$ для импульса с максимумом в узле i_s и шириной i_{τ_p} выглядит как

$$f^0(i) = \mathrm{E}_y^0(i) = \exp\left[-\left(i - i_s/i_{\tau_p}\right)^2/2\right]. \qquad (4.24)$$

Подобное возбуждение требует специфического амплитудного распределения по узлам, что, очевидно, является некомпактным представлением.

Возбуждение мод в линиях передачи и плоской волны. Поясним возбуждение мод в линиях передачи на примере волны H_{10} в прямоугольном металлическом волноводе. Возбуждающий источник в плоскости поперечного сечения представляется в виде $\mathbf{E}_S = \mathbf{y}_0\mathrm{E}_y(x,y)P(t)$, где $P(t)$ – временная зависимость источника; $\mathrm{E}_y(x,y)$ – пространственное распределение источника, совпадающее со структурой выбранной компоненты поля волны H_{10} в поперечном сечении. Плоскую электромагнитную волну можно возбудить одномерной решеткой, расположенной в плоскости x–y вдоль оси y, каждый узел которой возбуждает E_y – компоненту с соответствующей временной зависимостью. В результате возникает плоская волна, бегущая вдоль оси ox.

4.2.5. Граничные условия для открытой области

На рис. 4.8 представлена одномерная сетка с открытыми левой $i = 0$ и правой ($i = N$+1) границами. Полное поле (поле возбуждения плюс рассеянное поле) рассчитывается в области 1, ограниченной узла-

ми i_a и i_b; рассеянное поле определяется в области 2. В частности, падающее (например, плоская волна) и рассеянное поля могут задаваться (определяться) на границе областей 1 и 2. В соответствии с общим подходом решения задач методом КРВО необходимо ограничить область решения, задав определенные соотношения на границе, обеспечивающие отсутствие отражений. Иными словами, ограничение области есть, а граница прозрачна. Такие соотношения называются *абсолютно поглощающими* (*абсорбирующими*) *граничными условиями (absorbing boundary condition* – ABC).

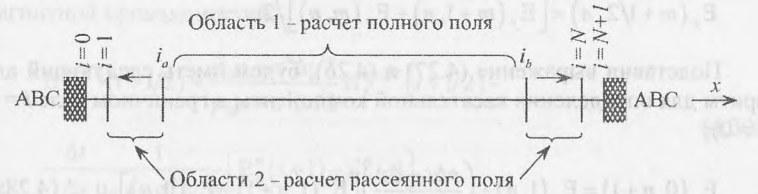


Рис. 4.8. Граничные условия для открытой области

Различают два типа ABC: *аналитические*, сформулированные в виде математических соотношений (аналогично условию излучения Зоммерфельда) и *материальные*, использующие слои с комплексными электрофизическими параметрами.

Аналитические ABC Мура (*Mur*). Волна не испытывает отражения в плоскости $x = \mathrm{const}$, если для $E_y(x,t)$ в уравнении (4.14) при распространении волны на левую границу (в отрицательном направление оси x (см. рис. 4.8)) выполняется условие $\mathrm{E}_y(x,t) = \mathrm{E}_y(x - \Delta x, t + \Delta t)$ при $c = \Delta x/\Delta t$. Разложение в ряд Тейлора $\mathrm{E}_y(x - \Delta x, t + \Delta t) = \mathrm{E}_y(x,t) - \left(\partial \mathrm{E}_y/\partial x\right)\Delta x + \left(\partial \mathrm{E}_y/\partial t\right)\Delta t$ при $c = \Delta x/\Delta t$ дает

$$\frac{\partial \mathrm{E}_y(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{E}_y(x,t)}{\partial t}, \qquad (4.25а)$$

и аналогично для правой границы

$$\frac{\partial \mathrm{E}_y(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{E}_y(x,t)}{\partial t}. \qquad (4.25б)$$

Условие (4.25а) гарантирует отсутствие отражений от левой границы, а (4.25б) – от правой. Условие типа (4.25) называется аналитическим (математическим) граничным условием ABC. Для центральной

конечно-разностной аппроксимации (4.25а) при $x=\Delta x/2$ и $t=(n+1/2)\Delta t$ получаем

$$\frac{E_y(1,n+1/2)-E_y(0,n+1/2)}{\Delta x}=\frac{1}{c}\frac{E_y(1/2,n+1)-E_y(1/2,n)}{\Delta t}. \quad (4.26)$$

Если значения поля в $i=1/2$ пространственных узлах и $n+1/2$ временных узлах недоступны, применяют операцию усреднения

$$E_y(m,n+1/2)=\left[E_y(m,n+1/2)+E_y(m,n)\right]/2;$$
$$E_y(m+1/2,n)=\left[E_y(m+1,n)+E_y(m,n)\right]/2. \quad (4.27)$$

Подставив выражение (4.27) в (4.26), будем иметь следующий алгоритм для определения касательной компоненты в граничном узле $i = 0$ ($x = 0$):

$$E_y(0,n+1)=E_y(1,n)+\left(\frac{c\Delta t-\Delta x}{c\Delta t+\Delta x}\right)\left[E_y(1,n+1)-E_y(0,n)\right]. \quad (4.28а)$$

Аналогично выводится алгоритм для определения касательной компоненты в граничном узле $N+1$

$$\left[x=(N+1)\Delta x\right]:$$
$$E_y(N+1,n+1)=E_y(N,n)+$$
$$+\left(\frac{c\Delta t-\Delta x}{c\Delta t+\Delta x}\right)\left[E_y(N,n+1)-E_y(N+1,n)\right]. \quad (4.28б)$$

Выражения (4.28) называются *аналитическими абсолютно поглощающими граничными условиями Мура первого порядка* или *АВС Мура первого порядка*. Условия Мура справедливы только для волны, распространяющейся строго по нормали к границе и только для $\alpha=1$ в дискретном случае, поэтому поверхность АВС должна располагаться не менее чем на половину длины волны от области решения (область 1 на рис. 4.8).

Материальные АВС. Если комплексные электрофизические параметры среды (1.13), (1.15) на границе подобраны соответствующим образом, то можно создать неотражающий интерфейс. Действительно, пусть на границе задана искусственная среда с параметрами $(\mu'_a,\varepsilon'_a,\sigma^*,\sigma)$, где σ –электрическая проводимость, а σ^* – фиктивная магнитная проводимость. Падающая по нормали волна не отразится от границы раздела среда – свободное пространство, если их характеристические сопротивления

равны, т.е. $Z_0=Z_m$, где $Z_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ – импеданс свободного пространства, $Z_m=\sqrt{(\mu'_a-i\sigma^*/\omega)/(\varepsilon'_a-i\sigma/\omega)}$. Взяв для определенности $\varepsilon'_a=\varepsilon_0$, $\mu'_a=\mu_0$, получаем следующее условие согласования:

$$\sigma^*/\mu_0=\sigma/\varepsilon_0. \quad (4.29)$$

Чтобы проверить эффективность использования равенства (4.29), перепишем уравнения (4.7) в их дискретном варианте (4.11) для учета диэлектрической проницаемости области решения, электрической и магнитной проводимостей:

$$H_z^{n+1/2}(i+1/2)=\frac{\mu_0\mu-\sigma^*\Delta t/2}{\mu_0\mu+\sigma^*\Delta t/2}H_z^{n-1/2}(i+1/2)-$$
$$-\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{1}{\mu_0\mu+\sigma^*\Delta t/2}\left[E_y^n(i+1)-E_y^n(i)\right], \quad (4.30а)$$

$$E_y^{n+1}(i)=\frac{\varepsilon_0\varepsilon-\sigma\Delta t/2}{\varepsilon_0\varepsilon+\sigma\Delta t/2}E_y^n(i)-\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon+\sigma\Delta t/2}\times$$
$$\times\left[H_z^{n+1/2}(i+1/2)-H_z^{n+1/2}(i-1/2)\right]. \quad (4.30б)$$

Далее зададим параметры дискретной среды в области узлов $250\le i\le 400$ для σ_i, линейно меняющейся от значений 0,001 до 0,01, 1/Ом·м $\left[\sigma_i=0{,}001+(i-250)(0{,}01-0{,}001)/(400-250)\right]$ и $\sigma_i^*=(120\pi)^2\sigma_i$, чтобы удовлетворить равенству (4.29). Зависимость модуля коэффициента отражения от частоты $\Gamma(f)=E_r(f)/E_i(f)$, где $E_i(f)$ – спектр падающего импульса и $E_r(f)$ – спектр отраженного импульса, приведена на рис. 4.9. Параметры моделирования: гауссов импульс длительностью 250 пс, $\Delta x=1{,}5$ мм и $\alpha=0{,}5$. Спектры импульса получены из временных зависимостей с помощью быстрого преобразования Фурье. Видно, что коэффициент отражения – порядка 10^{-4} для частот менее 6 ГГц; на 3ГГц отношение $\Delta x/\lambda=0{,}015$.

Рассмотренные граничные условия являются материальными АВС и называются *идеально согласованным слоем* ПСС (perfectly matched layer – PML). Рассмотренные соображения являются основополагающими для понимания двух- и трехмерных материальных АВС, рассмотренных в п.п. 4.3.3.

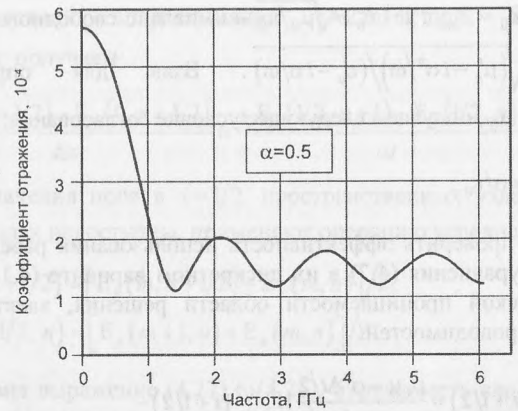


Рис. 4.9. Зависимость модуля коэффициента отражения от частоты при конечной проводимости среды

4.3. Двумерный метод конечных разностей во временной области

Рассмотрим двумерный метод КРВО аналогично п. 4.2 для одномерного случая.

4.3.1. Единичная ячейка в двумерном случае

Уравнения Максвелла (1.7) являются стартовой позицией в данном случае. Для определенности будем рассматривать двумерный случай для ТМ-возбуждения, содержащего компоненты H_x, H_y и E_z или ТЕ-возбуждения, содержащего компоненты E_x, E_y и H_z. Для ТМ-случая из уравнений (1.7), учитывая, что $\partial/\partial z = 0$, находим

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right). \qquad (4.31)$$

Для использования метода КРВО двумерная пространственная область решения разбивается на ячейки размером $\Delta x \times \Delta y$, характеризуемые электрофизическими параметрами ε, μ, σ. Моделируемая область пространства представляется в виде двух сеток, смещенных друг относительно друга на половину их шага . Типичная сетка и компоненты поля показаны на рис. 4.10,*а* (пунктиром выделена единичная ячейка).

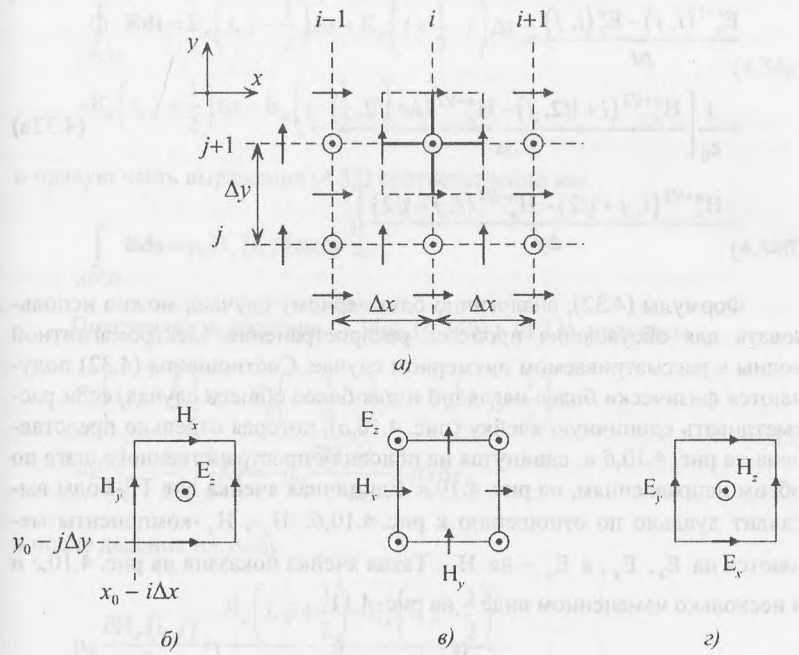


Рис. 4.10 – Двумерная ячейка:
а – для ТМ-волны; *б* и *в* – смещенные ячейки для ТМ-волны; *г* – ячейка для ТЕ-волны;
→ – H_x; ↑ – H_y; ⊙ – E_z

Следуя условным обозначениям, введенным ранее, компонента поля E_z определяется в дискретных точках (i, j, n), соответствующих пространственным узлам $(x_i = i\Delta x,\ y_j = j\Delta y)$ и временному отсчету $t_n = n\Delta t$; компонента H_x определяется в узлах $(i, j+1/2)$ и компонента H_y соответственно. Конечно-разностная версия (4.28) имеет вид

$$\frac{H_x^{n+1/2}(i, j+1/2) - H_x^{n-1/2}(i, j+1/2)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0}\left[\frac{E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)}{\Delta y}\right], \qquad (4.32а)$$

$$\frac{H_y^{n+1/2}(i+1/2, j) - H_y^{n-1/2}(i+1/2, j)}{\Delta t} = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{E_z^n(i+1, j) - E_z^n(i, j)}{\Delta x}\right], \qquad (4.32б)$$

$$\frac{E_z^{n+1}(i,j)-E_z^n(i,j)}{\Delta t}=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{H_y^{n+1/2}(i+1/2,j)-H_y^{n+1/2}(i-1/2,j)}{\Delta x}-\right. \tag{4.32в}$$

$$\left.-\frac{H_x^{n+1/2}(i,j+1/2)-H_x^{n-1/2}(i,j-1/2)}{\Delta y}\right].$$

Формулы (4.32), аналогично одномерному случаю, можно использовать для обсуждения процесса распространения электромагнитной волны в рассматриваемом двумерном случае. Соотношения (4.32) получаются физически более наглядно и для более общего случая, если рассматривать единичную ячейку (рис. 4.10,*а*), которая отдельно представлена на рис. 4.10,*б* и, сдвинутая на половину пространственного шага по обеим направлениям, на рис. 4.10,*в*. Единичная ячейка для ТЕ-моды выглядит дуально по отношению к рис. 4.10,*б*: H_x-, H_y-компоненты меняются на E_x, E_y, а E_z – на H_z. Такая ячейка показана на рис. 4.10,*г* и в несколько измененном виде – на рис. 4.11.

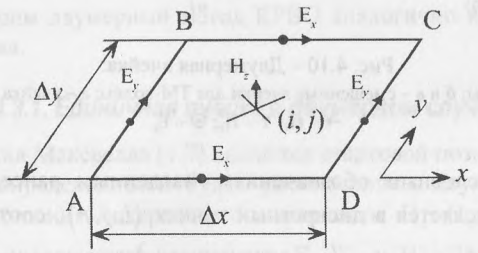


Рис. 4.11. Иллюстрация действия закона Фарадея для единичной ячейки

Применим к ней закон Фарадея (1.8б):

$$\oint_{ABCD}\mathbf{Edl}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_{ABCD}\mathbf{Bds}. \tag{4.33}$$

При анализе методом КРВО единичная ячейка сетки выбирается существенно меньше длины волны, поэтому векторы поля полагаются постоянными на всей ячейке, и левую часть равенства (4.33) можно записать как

$$\oint_{ABCD}\mathbf{Edl}=E_x\left(i,j-\frac{1}{2}\right)\Delta x+E_y\left(i+\frac{1}{2},j\right)\Delta y- \tag{4.34а}$$

$$-E_x\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\Delta x-E_y\left(i-\frac{1}{2},j\right)\Delta y,$$

и правую часть выражения (4.33) соответственно как

$$\int_{ABCD}\mathbf{Bds}=\mu_0 H_z(i,j)\Delta x\Delta y. \tag{4.34б}$$

Подставляя выражения (4.34а), (4.34б) в (4.33), получаем

$$E_x\left(i,j-\frac{1}{2}\right)\Delta x+E_y\left(i+\frac{1}{2},j\right)\Delta y-E_x\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\Delta x- \tag{4.35}$$

$$-E_y\left(i-\frac{1}{2},j\right)\Delta y=-\mu_0\frac{\partial H_z(i,j)}{\partial t}\Delta x\Delta y,$$

и после деления на $\Delta x\Delta y$

$$\mu_0\frac{\partial H_z(i,j)}{\partial t}=\frac{E_x\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-E_x\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y}-$$

$$-\frac{E_y\left(i+\frac{1}{2},j\right)\Delta y-E_y\left(i-\frac{1}{2},j\right)}{\Delta x},$$

или в (i,j)-узле получаем запись

$$\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t}=\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}, \tag{4.36}$$

которая является законом Фарадея в дифференциальной форме для случая ТЕ-моды. Используя остальные уравнения (1.8), можно вывести замкнутую систему уравнений для ТЕ-моды.

4.3.2. Явление численной дисперсии, анизотропии и выбор пространственных шагов

Для ТМ-моды дискретизированная форма уравнений Максвелла задана формулами (4.32). Эффект дискретизации и явление численной дисперсии могут быть рассмотрены по аналогии с одномерным случаем (4.17): записываем плоскую волну, которая распространяется в направ-

лении, задаваемом волновыми числами $k_x = k\cos\theta$, $k_y = k\sin\theta$ по направлениям x и y; записываем дискретную форму плоской волны с $\tilde{k}_x = \tilde{k}\cos\theta$, $\tilde{k}_y = \tilde{k}\sin\theta$ в дискретной среде с шагом $\Delta x = \Delta y = \Delta$; подставляем в уравнения (4.32) и после преобразований имеем дисперсионное уравнение для волны в дискретизированной среде:

$$\left(\Delta/c\Delta t\right)^2 \sin^2\left(\omega\Delta t/2\right) = \sin^2\left(\tilde{k}\Delta\cos\theta/2\right) + \sin^2\left(\tilde{k}\Delta\sin\theta/2\right). \qquad (4.37)$$

Выражение (4.37) может быть разрешено относительно $\tilde{k}$ в функции частоты и угла распространения волны. На рис. 4.12 представлена зависимость нормализованной фазовой скорости от угла распространения волны θ для $c\Delta t = \Delta/2$. Видно, что численная дисперсия зависит не только от размера Δ ячейки дискретизации, но и от угла распространения. Это явление носит название *анизотропии численной дисперсии*. Она максимальна вдоль направлений x и y и минимальна вдоль диагонали (45°).

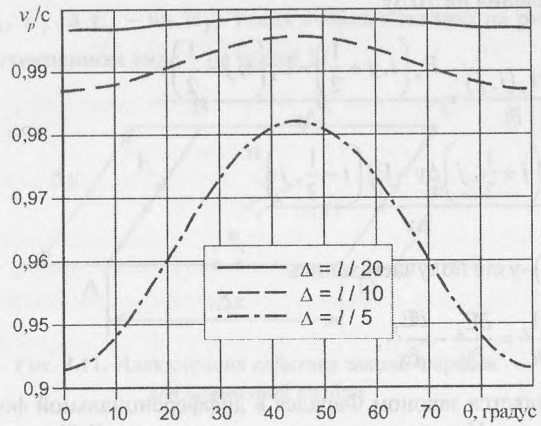


Рис. 4.12. Зависимость нормализованной фазовой скорости от направления распространения волны

Временной шаг при распространении вдоль какой-либо из осей аналогичен одномерному случаю (4.19) $\Delta t < \Delta/\upsilon_{max}$. Однако эта величина слишком большая при распространении волны по диагонали, поскольку эквивалентное расстояние равно $\Delta/\sqrt{2}$, поэтому верхнее значение временного шага выбирается из условия

$$\upsilon_{max}\Delta t \le \frac{1}{\sqrt{1/(\Delta x)^2 + 1/(\Delta y)^2}}, \qquad (4.38а)$$

где υ_{max} – максимальная фазовая скорость сигнала; для квадратной ячейки $\Delta x = \Delta y = \Delta$ имеем

$$\sqrt{2}\upsilon_{max}\Delta t \le \Delta. \qquad (4.38б)$$

4.3.3. Ограничение области моделирования

Ситуация при решении задач излучения, рассеяния с открытой областью представлена на рис. 4.13. Моделируемое устройство расположено в области 1, где рассчитывается полное поле (поле возбуждения плюс рассеянное поле); рассеянное поле определяется в области 2. В частности, падающее (например, плоская волна) и рассеянное поля могут задаваться (определяться) на границе областей 1 и 2. Граница с условиями ABC ограничивает область решения.

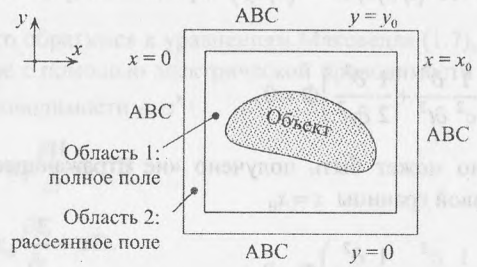


Рис. 4.13. Двумерная область моделирования

Аналитические абсолютно поглощающие граничные условиями Мура второго порядка, или ABC Мура второго порядка. Запишем волновое уравнение для произвольной компоненты Ф в двумерном случае

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0. \qquad (4.39а)$$

Это уравнение описывает распространение в произвольном направлении в xy-плоскости. Будем для определенности полагать область решения прямоугольной, ограниченной плоскостями $x = 0, x = x_0, y = 0, y = y_0$. Чтобы получить условия отсутствия отражений от внешних границ $x = 0, x = x_0$ представим линейный оператор (4.39а) в виде

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\left(\sqrt{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}}\right)^2\right]\Phi=0, \qquad (4.39б)$$

или

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}}\right)\Phi=0. \qquad (4.39в)$$

Уравнения, ограничивающие распространение волны только в одном направлении, могут быть получены, если применить факторизованную запись (4.39в) порознь, например, для левой границы $x = 0$, получаем аналитическое условие АВС

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}}\right)\Phi=0, \qquad (4.40)$$

реализовать которое, учитывая квадратный корень, затруднительно. Поэтому, полагая, что $(1/c)\partial/\partial t >> (\partial/\partial y)$ и разлагая корень в ряд Тейлора, будем иметь

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi=0. \qquad (4.41а)$$

Аналогично может быть получено «не отражающее» граничное условие для правой границы $x = x_0$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi=0. \qquad (4.41б)$$

Уравнения (4.41) называются *абсолютно поглощающими граничными условиями Мура второго порядка, или АВС Мура второго порядка*. Аналогичные условия для границ $y = 0, y = y_0$ получаются заменой x на y в (4.41). Для применения этих условий записывают, аналогично одномерному случаю, их дискретизированный (i, j, n) вариант. К сожалению, рассмотренное аналитическое граничное условие приводит к существенным отражениям для волн, распространяющихся не по нормали к границам.

Материальные поглощающие граничные условия – АВС или полностью согласованный слой – ПСС (PML). Создание границ на основе поглощающих материалов, существенно уменьшающих рассеянное от них электромагнитное поле, с успехом осуществлено в СВЧ-безэховых ка-

мерах, предназначенных для измерения параметров антенн, определения ЭПР объектов и т.п. При этом материал стенок безэховых камерах – ,это материалы с физически реальными электрофизическими параметрами. Расширим такой подход для создания подобных границ области моделирования (рис. 4.14) для произвольных углов падения волны, частоты и поляризации.

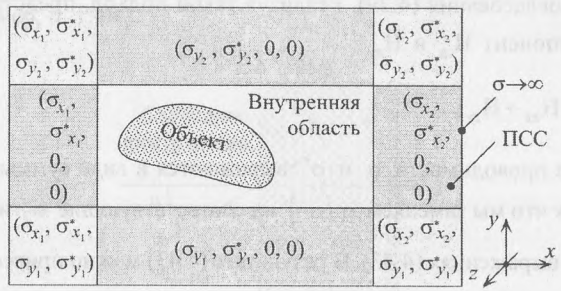


Рис. 4.14. Двумерная область моделирования с полностью согласованным слоем (ПСС)

Для этого обратимся к уравнениям Максвелла (1.7), включив в них потери в среде с помощью электрической проводимости σ и фиктивной магнитной проводимости – σ^*:

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\mu_a\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\sigma^*\mathbf{H}. \qquad (4.42а)$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\varepsilon_a\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\sigma\mathbf{E}. \qquad (4.42б)$$

Для случая ТЕ относительно оси z волны в свободном пространстве, поскольку в двумерном случае $\partial/\partial z = 0$, из уравнений (4.42) имеем

$$\mu_0\frac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial t}+\sigma^*\mathrm{H}_z=\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial x}, \qquad (4.43а)$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial t}+\sigma\mathrm{E}_x=\frac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial y}, \qquad (4.43б)$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial t}+\sigma\mathrm{E}_y=-\frac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial x}. \qquad (4.43в)$$

В формулировке, предложенной Дж. Беренгером (J.P. Berenger) [29], падающее волновое поле разбивается на две парциальные Т-волны аналогично разложению вектора на две компоненты. Одна из этих пар-

циальных волн распространяется вдоль оси x, а другая – вдоль оси y. Соответственно парциальные волны распространяются в среде с потерями, характеризуемой параметрами $(\varepsilon_0, \mu_0, \sigma_x, \sigma_x^*)$ или $(\varepsilon_0, \mu_0, \sigma_y, \sigma_y^*)$. Каждая из этих плоских волн распространяется нормально к поглощающей границе и имеет импеданс σ_i, σ_i^*, $i = x, y$, удовлетворяющий условию согласования (4.29). Реализуя такой подход, представляем H_z в виде компонент H_{zx} и H_{zy}:

$$H_z = H_{zx} + H_{zy}. \tag{4.44}$$

Тогда проводимости σ и σ^* выражаются в виде суммы x и y компонент, так что мы заменяем $\sigma\left(\sigma^*\right)$ на соответствующие σ_x или σ_y (σ_x^* или σ_y^*) в выражениях (4.43). В результате (4.43) можно привести к виду

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = \frac{\partial E_x}{\partial y}, \tag{4.45а}$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x = \frac{\partial \left(H_{zx} + H_{zy}\right)}{\partial y}, \tag{4.45б}$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zy} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}, \tag{4.45в}$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_y = -\frac{\partial \left(H_{zx} + H_{zy}\right)}{\partial x}. \tag{4.45г}$$

Видно, что равенства (4.45) представляют собой обобщение физической модели среды. Действительно, если $\sigma_x = \sigma_y = 0$ и $\sigma_x^* = \sigma_y^* = 0$, то выражения (4.45) сводятся к двумерным уравнениям Максвелла для среды без потерь. Если $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ и $\sigma_x^* = \sigma_y^* = 0$, то (4.45) описывает проводящую среду и т.д. Тем не менее запись (4.45) дает определенную степень свободы. Если $\sigma_y = \sigma_y^* = 0$, то среда поглощает плоскую волну с компонентами $\left(E_y, H_{zx}\right)$, распространяющуюся вдоль оси x (это следует из уравнений (4.45в) и (4.45г)), и не поглощает плоскую волну с компонентами $\left(E_x, H_{zy}\right)$, распространяющуюся вдоль оси y, поскольку эта волна описывается соотношениями (4.45а), (4.45б). Соответственно комментируется случай $\sigma_x = \sigma_x^* = 0$.

Опуская подробности, которые можно найти в работе [29], технология получения решения (4.45) для ТЕ-волны, распространяющейся под углом θ на границу свободное пространство – «среда Беренгера» (рис. 4.15), следующая: осуществляют в записи (4.45) переход к комплексному представлению в частотной области, далее получают волновое уравнение для H_z-компоненты (используя традиционную технику, см., например, п. 1.4.4).

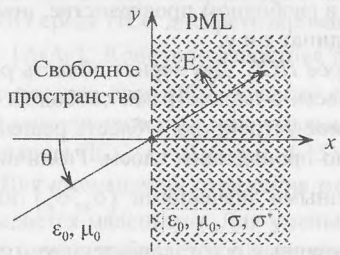


Рис. 4.15. Падение волны на границу раздела «свободное пространство – ПСС»

Решив его, можно записать решение для произвольной компоненты в выражениях (4.45) в следующем виде:

$$\Psi = \Psi_0 e^{i\left[\omega t - \left(k_x x + k_y y\right)/G\right]} e^{-\left(\sigma_x \cos\theta/\varepsilon_0 cG\right)x} e^{-\left(\sigma_y \sin\theta/\varepsilon_0 cG\right)y}, \tag{4.46}$$

где $G = \sqrt{w_x \cos^2\theta + w_y \sin^2\theta}$; $w_x = \left(1 - \frac{i\sigma_x}{\omega\varepsilon_0}\right) \Big/ \left(1 - \frac{i\sigma_x^*}{\omega\mu_0}\right)$ и $w_y = \left(1 - \frac{i\sigma_y}{\omega\varepsilon_0}\right) \Big/ \left(1 - \frac{i\sigma_y^*}{\omega\mu_0}\right)$; $k_x = k\cos\theta$; $k_y = k\sin\theta$; $k = \omega/c$; c – скорость света.

Волновое сопротивление «среды Беренгера» определяется как

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{G}. \tag{4.47}$$

Волновое сопротивление Z_B отличается от импеданса среды слева от границы на рис. 4.15. Условие полного согласования для произвольных углов падения и частот в соответствии с соотношениями (4.46), (4.47) достигается при $G = 1$, т.е. при $w_x = w_y$, а из уравнения (4.46) вытекает условие

$$\sigma_i^* / \mu_0 = \sigma_i / \varepsilon_0, \quad i = x, y, \tag{4.48}$$

что является обобщением записи (4.29) для двумерного случая. Тогда уравнение (4.46) определяется как

$$\Psi = \Psi_0 e^{i\left[\omega t-\left(k_x x+k_y y\right)\right]} e^{-\left(\sigma_x \cos\theta/\varepsilon_0 c\right)x} e^{-\left(\sigma_y \sin\theta/\varepsilon_0 c\right)y}.$$

Полученные условия называются *материальными поглощающими граничными условиями* (*ABC*) – *ПСС*. Видно, что для рассматриваемого случая скорость волны и направление распространения в среде с потерями такие же, как и в свободном пространстве, при экспоненциальном затухание вдоль координат x и y.

Выбор параметров ПСС. Двумерная область решения показана на рис. 4.14. Внутри области с параметрами свободного пространства расположено моделируемое устройство. Область решения ограничена ПСС с последним, идеально проводящим слоем. Различные участки области ПСС задаются различными значениями $\left(\sigma_x, \sigma_x^*\right)$ или $\left(\sigma_y, \sigma_y^*\right)$, например, слои, перпендикулярные оси x, характеризуются $\left(\sigma_x, \sigma_x^*\right)$. Угловые области определяются перекрытием соответствующих слоев. Значения $\left(\sigma_x, \sigma_x^*\right)$ и $\left(\sigma_y, \sigma_y^*\right)$ задаются в соответствие с равенством (4.48). Результатом является отсутствие отражения от границы. Тем не менее в силу конечной толщины ПСС (а следовательно, и затухания) возникает отражение от последнего, идеально проводящего слоя. Поэтому отражение характеризуют функцией толщины слоя t и профиля проводимости $\sigma_n(p)$, где p – расстояние от границы. Используется обозначение σ_n вместо σ_i для слоя, перпендикулярного направлению $n = x, y$. Коэффициент отражения $R(\Phi)$ для волны, падающей под углом θ относительно нормали к границе ПСС, равен

$$R(\Phi) = \left|R(0)\right|^{\cos\theta}, \tag{4.49}$$

где $R(0)$ – коэффициент отражения при нормальном падении на внешней стороне ПСС (см. рис. 4.14), определенный в соответствие с выражением (4.48) как

$$R(0) = \exp\left(-\frac{2}{\varepsilon_0 c}\int_0^t \sigma_n(p)\,dp\right). \tag{4.50}$$

Значение $R(0)$ зависит от толщины ПСС и проводимости среды, профиль проводимости которой может быть выбран по формуле

$$\sigma_n(p) = \sigma_{\max}(p/t)^n, \tag{4.51}$$

здесь $n = 1$ проводимость $\sigma_n(p)$ линейно возрастает, а при $n = 2$ – возрастает по параболе, при этом коэффициент отражения равен

$$R(0) = \exp\left[-\frac{2\sigma_{\max} t}{(n+1)\varepsilon_0 c}\right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.52}$$

где $\sigma_{\max}$ – максимальная проводимость поглощающей среды.

До сих пор предполагалось, что среда ПСС являлась непрерывной, однако в методе КРВО среда ПСС дискретизирована с размером ячейки в двумерном случае $(\Delta x \Delta y)$. Конечно-разностная дискретизация приводит к отражению от первого слоя ПСС и между слоями ПСС. Численным экспериментом установлено, что максимальное отражение происходит на внешней границе ПСС ($x = 0$ на рис. 4.15), причем оно растет с увеличением $\sigma_{\max}$. Для уменьшения отражения от первого слоя значение σ_1 специально задается маленьким. Для уменьшения отражения между слоями профиль потерь выбирается с ограниченной скоростью роста потерь. Для уменьшения влияния волны, отраженной от проводящей границы последнего слоя ПСС, увеличивается число слоев ПСС.

4.4. Трехмерный метод конечных разностей во временной области

Алгоритмы метода КРВО для одномерного и двумерного случаев полезны для понимания общей концепции метода и решения простейших электродинамических задач. Процедуры численного моделирования антенн и антенных решеток, как правило, трехмерные (см. рис. 5.13). Концепции метода КРВО и алгоритмы можно распространить и на трехмерный случай. Для этого обратимся к уравнениям Максвелла для трехмерного случая, объединяющего шесть компонент электромагнитного поля – $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$, которые в соответствие с (1.7) образуют систему

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_a}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_a}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right),\\
&\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_a}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu_a}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu_a}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu_a}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right).
\end{aligned} \tag{4.53}$$

4.4.1. Алгоритм трехмерного метода

Трехмерная область пространства разбивается на ячейки (ячейки *Yee*) размером $\Delta x\Delta y\Delta z$ (рис. 4.16). Моделируемая область пространства представляется в виде двух сеток для расчета векторов **E** и **H**, смещенных друг относительно друга на половину шага сеток. Сетка, содержащая узлы, на которых рассчитываются компоненты магнитного поля **H**, смещена в пространстве на половину шага сетки $(\Delta x/2,\ \Delta y/2, \Delta z/2,)$ по отношению к соответствующему **E**-узлу (например, H_x-компонента смещена в пространстве относительно E_x на $(\Delta x/2,\ \Delta y/2,\ \Delta z/2,)$ и так далее для узлов H_y и H_z). H-узлы окружены E-узлами и наоборот. Замечательным свойством *Yee*-ячейки при выбранных узлах отсчета является то, что поля **E** и **H** удовлетворяют уравнениям Максвелла в интегральной и дифференциальной форме. Это свойство проиллюстрировано для двумерного случая в п. 4.3.1. *Yee*-ячейка уменьшает вычислительные ресурсы, поскольку **E** и **H** рассчитываются в разных узлах. Расположение трехмерных ячеек *Yee* создает окружение, при котором контуры, в узлах которых вычисляются компоненты полей **E** и **H**, образуют цепеобразную форму.

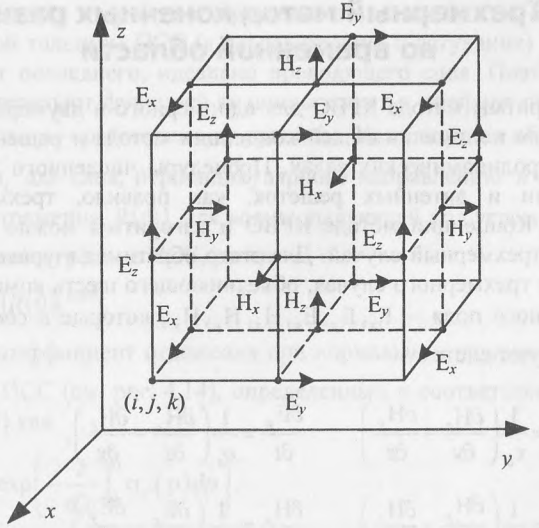


Рис. 4.16. Геометрия трехмерной ячейки *Yee*

Для использования метода КРВО первые три уравнения система (4.53) следует записать в конечно-разностной форме:

$$E_x^{n+1}\left(i-\tfrac{1}{2},j,k\right)=E_z^{n}\left(i-\tfrac{1}{2},j,k\right)+$$
$$+\frac{\Delta t}{\varepsilon_0\Delta y}\left[H_z^{n+1/2}\left(i-\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k\right)-H_z^{n+1/2}\left(i-\tfrac{1}{2},j-\tfrac{1}{2},k\right)\right]- \quad (4.54а)$$
$$-\frac{\Delta t}{\varepsilon_0\Delta z}\left[H_y^{n+1/2}\left(i-\tfrac{1}{2},j,k+\tfrac{1}{2}\right)-H_y^{n+1/2}\left(i-\tfrac{1}{2},j,k-\tfrac{1}{2}\right)\right],$$
$$E_y^{n+1}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k\right)=E_y^{n}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k\right)+$$
$$+\frac{\Delta t}{\varepsilon_0\Delta z}\left[H_x^{n+1/2}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2}\right)-H_x^{n+1/2}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k-\tfrac{1}{2}\right)\right]- \quad (4.54б)$$
$$-\frac{\Delta t}{\varepsilon_0\Delta x}\left[H_z^{n+1/2}\left(i+\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k\right)-H_z^{n+1/2}\left(i-\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k\right)\right],$$
$$E_z^{n+1}\left(i,j,k+\tfrac{1}{2}\right)=E_z^{n}\left(i,j,k+\tfrac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{\Delta t}{\varepsilon_0\Delta x}\left[H_y^{n+1/2}\left(i+\tfrac{1}{2},j,k+\tfrac{1}{2}\right)-H_y^{n+1/2}\left(i-\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2}\right)\right]- \quad (4.54в)$$
$$-\frac{\Delta t}{\varepsilon_0\Delta y}\left[H_x^{n+1/2}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2}\right)-H_x^{n+1/2}\left(i,j-\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2}\right)\right].$$

Три последних уравнения системы (4.53) можно записать аналогично:

$$H_x^{n+1/2}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2}\right)=H_x^{n-1/2}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2}\right)-$$
$$-\frac{\Delta t}{\mu_0\Delta y}\left[E_z^{n}\left(i,j,k+\tfrac{1}{2}\right)-E_z^{n}\left(i,j-1,k+\tfrac{1}{2}\right)\right]+ \quad (4.54г)$$
$$+\frac{\Delta t}{\mu_0\Delta z}\left[E_y^{n}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k\right)-E_y^{n}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k-1\right)\right],$$
$$H_y^{n+1/2}\left(i-\tfrac{1}{2},j,k+\tfrac{1}{2}\right)=H_y^{n-1/2}\left(i-\tfrac{1}{2},j,k+\tfrac{1}{2}\right)-$$
$$-\frac{\Delta t}{\mu_0\Delta z}\left[E_x^{n}\left(i-\tfrac{1}{2},j,k\right)-E_x^{n}\left(i-\tfrac{1}{2},j,k-1\right)\right]+ \quad (4.54д)$$
$$+\frac{\Delta t}{\mu_0\Delta x}\left[E_z^{n}\left(i,j,k+\tfrac{1}{2}\right)-E_z^{n}\left(i-1,j,k+\tfrac{1}{2}\right)\right],$$
$$H_z^{n+1/2}\left(i-\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k\right)=H_z^{n-1/2}\left(i-\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k\right)-$$
$$-\frac{\Delta t}{\mu_0\Delta x}\left[E_y^{n}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k\right)-E_y^{n}\left(i-1,j+\tfrac{1}{2},k\right)\right]+ \quad (4.54е)$$
$$+\frac{\Delta t}{\mu_0\Delta y}\left[E_x^{n}\left(i-\tfrac{1}{2},j,k\right)-E_x^{n}\left(i-\tfrac{1}{2},j-1,k\right)\right].$$

4.4.2. Явление численной дисперсии и выбор шагов дискретизации

Эффект дискретизации и явление численной дисперсии могут быть рассмотрены по аналогии с одномерным случаем (4.17) или с использованием записи (4.37) для двумерного случая. В результате для плоской волны, записанной в дискретной среде с шагом $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, распространяющейся в направлении, задаваемом волновыми числами $\tilde{k}_x = \tilde{k}\cos\theta$, $\tilde{k}_y = \tilde{k}\sin\theta$ по направлениям x и y, получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$(1/c\Delta t)^2 \sin^2(\omega\Delta t/2) = \left[\sin\left(\tilde{k}_x\Delta x/2\right)/\Delta x\right]^2 + \\ + \left[\sin\left(\tilde{k}_y\Delta y/2\right)/\Delta y\right]^2 + \left[\sin\left(\tilde{k}_x\Delta z/2\right)/\Delta z\right]^2. \quad (4.55)$$

Выражение (4.55) разрешается в явном виде относительно $\tilde{k}$ в функции частоты и угла распространения волны. Численным экспериментом установлено, что для минимизации дисперсии размер ячейки следует выбирать из условия $\Delta x = \Delta y = \Delta z$. Однако влияние размеров на дисперсию при $\Delta x \neq \Delta y \neq \Delta z$ достаточно мало, когда $\Delta y/\Delta x$, $\Delta z/\Delta x$ и $\upsilon_{\max}\sqrt{3}\Delta t/\Delta x$ лежат в интервале от 1,0 до 1,225, где x – наименьший размер.

Выбор временного шага Δt при распространении в трехмерном пространстве основывается на тех же рассуждениях, что и для двумерного случая (4.38а). Верхнее значение временного шага выбирается из условия

$$\upsilon_{\max}\Delta t \le \frac{1}{\sqrt{1/(\Delta x)^2 + 1/(\Delta y)^2 + 1/(\Delta z)^2}}, \quad (4.56)$$

где $\upsilon_{\max}$ – максимальная фазовая скорость сигнала; для квадратной ячейки $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$ имеем

$$\upsilon_{\max}\Delta t \le \Delta/\sqrt{3}. \quad (4.57)$$

Заметим, что малое значение временного шага при мелких пространственных размерах существенно увеличивает время моделирования структуры.

4.4.3. Ограничение области моделирования

Ситуация при решении задач излучения, рассеяния с открытой областью представлена на рис. 4.14, 5.13. *Аналитические абсолютно поглощающие граничные условиями Мура второго порядка, или АВС Мура*

второго порядка, получаются как развитие двумерного случая, рассмотренного в п.п. 4.3.3. Например, на грани $x = 0$ для произвольной компоненты поля Ф можно записать

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi = 0 \quad (4.58)$$

и представить в центрально-разностной форме в узле $(1/2, j, k)$, используя как АВС при $x = 0$.

Материальные поглощающие граничные условия – АВС или полностью согласованный слой – ПСС также получаются как развитие двумерного случая, рассмотренного в п.п. 4.3.3. Для этого различные участки ПСС, ограничивающие область моделирования, подразделяют на лицевые, краевые и угловые в соответствии с их позицией на внутренней поверхности ПСС. Например, z-лицевая область является проекцией области ПСС и характеризуется параметрами $\sigma_x = 0$ и $\sigma_y = 0$. Аналогично, xy-краевые элементы характеризуется $\sigma_z = 0$. И наконец, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ используются для определения угловых элементов ПСС.

4.4.4. К сравнению аналитических и материальных граничных условий

АВС Мура имеют низкий коэффициент отражения – 0,01…0,001, но только по нормали. Особенно резко он растет при отличных от нормали направлений и может достигать единицы при скользящих углах. Расстояние от моделируемого устройства – не менее $\lambda/3$. АВС Мура рекомендуется использовать при проведении грубых расчетов, для моделирования простых электродинамических задач.

ПСС при числе ячеек 6…8 имеют коэффициент отражения 60…80 дБ. К недостаткам ПСС относятся больший объем требуемой памяти, чем для АВС Мура (в 1,5…4 раза), и резкое увеличение коэффициента отражения от границ ПСС на низких частотах. Частично это можно наблюдать на рис. 4.9. Нижняя граничная частота для известного значения электрической проводимости на границе $\sigma(0)$ находится из выражения $f_{\text{гр.ПСС}} \approx \chi\left[\sigma(0)/2\pi\varepsilon_0\right]$, где эмпирический коэффициент $\chi = 5...10$ получен в результате численного эксперимента.

4.5. Пакет программ для численного анализа антенного полотна антенной решетки методом конечных разностей во временной области

Пакет программ, предназначенный для расчета параметров и моделирования электромагнитных полей в сложных СВЧ-устройствах структурно, как правило, состоит из следующих программных модулей (рис. 4.17) [30]:

– редактор ввода геометрии и электрофизических параметров моделируемых объектов;

– программа моделирования методом КРВО, основное счетное ядро программы;

– аниматор общего применения, основанный на последовательности графических файлов, позволяющий наблюдать динамику электромагнитного поля во времени в рассматриваемом пространстве;

– постобработка рассчитанного основной КРВО-программой электромагнитного поля и расчет дополнительных параметров и характеристик, например диаграммы направленности, частотных характеристик, входных сопротивлений и др.



Рис. 4.17. Структура программы электродинамического моделирования методом КРВО

Для решения сложных задач, которые включают в себя постобработку и оптимизацию проекта, рекомендуется использовать компьютер со следующими параметрами: процессор – Pentium 4, тактовая частота – 3 ГГц, объем ОЗУ – около 2 Гбайт, требуемый свободный объем жесткого диска (HDD) для установки программы и ее работы – не менее 1 Гбайт.

На сегодняшний день существуют коммерческие программные продукты, использующие метод КРВО для электродинамического моделирования: CST Microwave Studio, Fidelity (Zeland Software, Inc.), XFDTD (Remcom), SEMCAD (Schmid & Partner Engineering AG).

— ГЛАВА 5 —

Метод конечных элементов

Метод конечных элементов – МКЭ [31–35] отличается от классических методов моментов и Ритца формулировкой функции – решения задачи. Решение для классических методов моментов и Ритца ищется в виде ряда по базисным функциям, определенным на всей области решения и удовлетворяющихм граничным условиям. Основная идея МКЭ состоит в том, что любая непрерывная величина (например, электрическое или магнитное поле) аппроксимируется моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей, совокупность которых образует искомую область. Поскольку подобласти малы, то базисные функции могут быть достаточно простыми. Это особенно очевидно для двумерных и трехмерных областей со сложными границами, когда выбор базисных функций в методах моментов и Ритца затруднителен (см. гл. 2). Кроме того, МКЭ удачно сопрягается с компьютерными технологиями.

При использовании МКЭ поступают следующим образом:

1. В рассматриваемой области фиксируется конечное число точек, называемых узловыми точками (узлами). Значение непрерывной величины, которая должна быть определена в каждой узловой точке, считается переменной.

2. Область определения непрерывной величины разбивается на конечное число подобластей, называемых *элементами*. Эти элементы имеют общие узловые точки и в совокупности аппроксимируют форму области.

3. Непрерывная величина аппроксимируется на каждом элементе полиномом (*функцией элемента*), который определяется с помощью узловых значений данной величины. Для каждого элемента определяется свой полином, подбираемый таким образом, чтобы сохранить непрерывность величины вдоль границ элемента.

4. Подстановка аппроксимаций в уравнения Максвелла (или эквивалентные им) с учетом граничных условий дает СЛАУ, решая которую

определяют узловые значения искомой величины и, следовательно, находят приближенное решение задачи.

5.1. Дискретизация пространства и линейные интерполяционные полиномы

В соответствии с методом конечных элементов при решении трехмерных задач в качестве элемента разбиения используется тетраэдр, для двухмерных задач его аналог на плоскости – треугольник и линейный отрезок для одномерного случая (рис. 5.1,*а–в*). Типичное разбиение двухмерной области анализа показано на рис. 5.2.

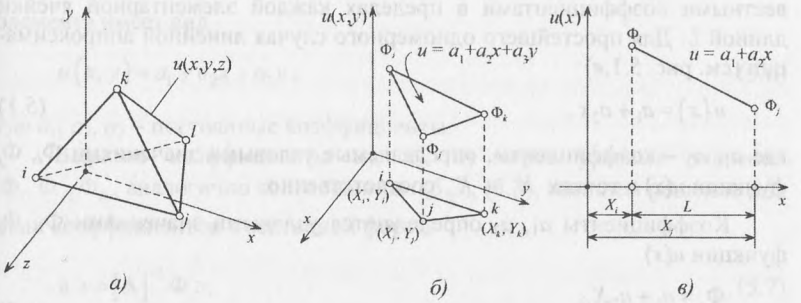


Рис. 5.1. Типичные элементы разбиения области анализа

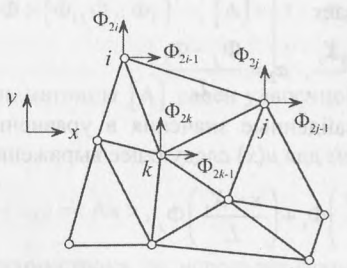


Рис. 5.2. Пример разбиения двухмерной области анализа

Между размером ячейки, желательным уровнем точности и имеющимися в наличии вычислительными ресурсами имеется противоречие. С одной стороны, точность решения зависит от того, насколько мала величина каждого из отдельных элементов (тетраэдров). С другой – решение задачи при большом количестве ячеек требует применения быстродействующих процессоров и большой оперативной памяти. Поэтому необходимо искать компромисс между точностью решения, време-

нем и ресурсами, необходимыми для его реализации. Самым правильным критерием для выбора размеров ячейки является критерий малой вариации поля в ее пределах. В этом случае поле может быть корректно аппроксимировано линейной функцией. Скорость изменения поля зависит от рабочей частоты и неоднородности среды. Во всяком случае, появление ячеек с размерами, большими λ/10 (λ – длина волны в среде, в которой ищется решение), нежелательно.

5.1.1. Одномерный элемент

Ключевым моментом МКЭ является представление неизвестной функции u в виде разложения по известным базисным функциям с неизвестными коэффициентами в пределах каждой элементарной ячейки длиной L. Для простейшего одномерного случая линейной аппроксимации (см. рис. 5.1,*в*)

$$u(x) = a_1 + a_2 x, \tag{5.1}$$

где a_1, a_2 – коэффициенты, определяемые узловыми значениями Φ_i, Φ_j функции $u(x)$ в точках X_i и X_j соответственно.

Коэффициенты a_1, a_2 определяются узловыми значениями Φ_i, Φ_j функции $u(x)$

$$\begin{aligned} \Phi_i &= a_1 + a_2 X_i, \\ \Phi_j &= a_1 + a_2 X_j, \end{aligned} \tag{5.2}$$

решение которых дает

$$a_1 = \frac{\Phi_i X_j - \Phi_j X_i}{L}, \quad a_2 = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{L}. \tag{5.3}$$

Подставляя найденные значения в уравнение (5.1) и группируя слагаемые, получаем для $u(x)$ следующее выражение:

$$u(x) = \left(\frac{X_j - x}{L}\right)\Phi_i + \left(\frac{x - X_i}{L}\right)\Phi_j. \tag{5.4}$$

Линейные функции x в формуле (5.4) называются *функциями формы* или интерполяционными функциями. Окончательно в соответствии с выражением (5.4) неизвестная функция $u(x)$ представляется в матричном виде

$$u(x) = N_i\Phi_i + N_j\Phi_j = <\mathbf{N}\boldsymbol{\Phi}>, \tag{5.5}$$

где $\boldsymbol{\Phi} > = \left(\Phi_i, \Phi_j\right)^{\mathrm{T}}$ – матрица-столбец; $<\mathbf{N} = \left(N_i, N_j\right)$ – матрица-строка из элементов $N_i = \left(X_j - x\right)/L$, $N_j = \left(x - X_i\right)/L$, T – знак транспонирования.

ния. Как видно из формулы (5.4), функция N_i равна единице в узле с номером i и нулю в j-м узле. Аналогично функция N_j равна единице в узле с номером j и нулю в i-м узле. Эти значения характерны для функций элемента.

5.1.2. Двумерный элемент МКЭ

Двумерный элемент показан на рис. 5.1,*б*. Это треугольник с прямолинейными сторонами и тремя узлами, по одному в каждой вершине. Узловые значения функции $u(x, y)$ обозначаются через Φ_i, Φ_j, Φ_k, а координаты пары трех узлов – через $\left(X_i, Y_i\right)$, $\left(X_j, Y_j\right)$, $\left(X_k, Y_k\right)$. Функция элемента имеет вид

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y, \tag{5.6}$$

где a_1, a_2, a_3 – постоянные коэффициенты.

Выразив коэффициенты a_1, a_2, a_3 через узловые значения Φ_i, Φ_j, Φ_k, аналогично соотношениям (5.2), (5.3), запишем решение для этих коэффициентов в векторной форме

$$\mathbf{a} > = \left[\mathbf{A}\right]^{-1}\boldsymbol{\Phi} >, \tag{5.7}$$

где $\mathbf{a} > = \left(a_1, a_2, a_3\right)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\Phi} > \left(\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k\right)^{\mathrm{T}}$, $\left[\mathbf{A}\right] = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix}$,

при этом определитель матрицы $\left[\mathbf{A}\right]$ равен удвоенной площади элемента $2S$.

Так как

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y = <\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{a} >,$$

где $<\boldsymbol{\Lambda} = (1, x, y)$ – вектор-строка, то, используя формулу (5.7), получим для интерполяционного полинома

$$u(x, y) = <\boldsymbol{\Lambda}\left[\mathbf{A}\right]^{-1}\boldsymbol{\Phi} > = <\mathbf{N}\boldsymbol{\Phi} > = N_i\Phi_i + N_j\Phi_j + N_k\Phi_k. \tag{5.8}$$

Здесь *функция элемента* $<\mathbf{N} = \left(N_i, N_j, N_k\right)$ представляется произведением

$$<\mathbf{N} = <\boldsymbol{\Lambda}\left[\mathbf{A}\right]^{-1}, \tag{5.9}$$

при этом $N_i = \frac{1}{2S}\left[a_i + b_i x + c_i y\right]$, где $\begin{cases} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \\ b_i = Y_j - Y_k, \\ c_i = X_k - X_j; \end{cases}$

$N_j = \frac{1}{2S}\left[a_j + b_j x + c_j y\right]$, где $\begin{cases} a_j = X_k Y_i - X_i Y_k, \\ b_j = Y_k - Y_i, \\ c_j = X_i - X_k; \end{cases}$

$N_k = \frac{1}{2S}\left[a_k + b_k x + c_k y\right]$, где $\begin{cases} a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \\ b_k = Y_i - Y_j, \\ c_k = X_j - X_i. \end{cases}$

В соответствии со сказанным ранее, функции N_i, N_j, N_k равны единице в одноименном узле с номером i, j или k и нулю в остальных. Действительно, вычислим значение N_i в i-м узле:

$$N_i = \frac{1}{2S}\left[a_i + b_i x + c_i y\right] = \frac{1}{2S}\left(X_j Y_k - X_k Y_j + Y_j X_i - Y_k X_i + X_k Y_i - X_j Y_i\right) = 1,$$

поскольку выражение в скобках представляет собой величину определителя матрицы $[\mathbf{A}]$ в формуле (5.7). Аналогичным образом можно показать, что N_i равно нулю в остальных узлах. Эти значения характерны для функций элемента.

Постоянство градиента внутри каждого элемента означает, что необходимо использовать очень малые по величине элементы, чтобы аппроксимировать быстро меняющуюся функцию $u(x, y)$. Обычно в МКЭ используют полиномиальные аппроксимации неизвестной функции. В частности, для двумерного случая функция (5.6) – это ни что иное, как полный полином первой степени. Полный полином второй степени имеет вид $u(x, y) = a_1 + \alpha_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2$, при этом, если полином первого порядка содержал три коэффициента, то полином второго порядка – уже шесть. Соответственно в первом случае достаточно было трех значений функции формы элемента в трех точках – вершинах треугольника, то во втором необходимо использовать дополнительные точки, как это показано на рис. 5.3.

По существу формула (3.8) дает аппроксимацию, которая совпадает с точной функцией в ряде дискретных точек. Эти точки – узловые точки аппроксимации, т.е. те самые точки, в которых мы определяли Φ_i, Φ_j, Φ_k. Чем выше степень полинома, тем больше число узловых то-

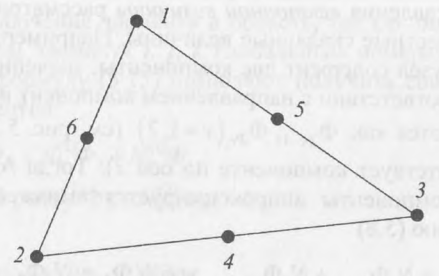


Рис. 5.3. Вершины для полного многочлена второй степени на треугольном элементе

чек, тем точнее аппроксимация неизвестной функции. Отметим, что в промежуточных точках аппроксимация всегда отличается от точной функции. Использование более высокой степени полинома в пределах элементарной ячейки повышает точность определения поля и позволяет увеличить размер ячейки при сохранении точности. Таким образом, усложняя аппроксимацию, казалось бы, можно уменьшить число разбиений области за счет увеличения размера ячейки и ускорить решение задачи. Однако это иллюзорное представление. Дело в том, что на скорость решения влияет не число ячеек, а число неизвестных коэффициентов, входящих в СЛАУ. С этой точки зрения увеличение размера ячейки за счет увеличения порядка базисных функций может ничего не дать, так как общее число неизвестных коэффициентов, равное произведению числа ячеек на число базисных функций, иногда не изменяется или даже увеличивается. Поэтому при численной реализации МКЭ предпочтение отдают простым аппроксимациям поля полиномами первого и второго порядка.

5.1.3. Трехмерный элемент МКЭ. Интерполирование векторных величин. Функции элемента для всей дискретизируемой области

Трехмерный элемент (тетраэдр) показан на рис. 5.1,*а*. Четыре его узла обозначены индексами i, j, k, l, узловые значения функции $u(x, y)$ – через $\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k, \Phi_l$, а функция элемента имеет вид

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z, \qquad (5.10)$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 – постоянные коэффициенты. Стандартная процедура, приведенная выше, позволяет найти выражения для *функции формы* и *функции элемента* в трехмерном случае, аналогичные соотношениям (5.8), (5.9).

Для представления *векторной величины* рассматривают ее компоненты как неизвестные скалярные величины. Например, для двумерной задачи каждый узел содержит две компоненты, значения которых, упорядоченные в соответствии с направлением компонент векторов по осям x и y, обозначаются как $\Phi_{2\nu-1}$, $\Phi_{2\nu}\left(\nu=1,2\right)$ (см. рис. 5.2 – наименьшее значение соответствует компоненте по оси x). Тогда горизонтальная и вертикальная компоненты аппроксимируется выражением, аналогичным соотношению (5.8)

$$\varphi = N_i\Phi_{2i-1} + N_j\Phi_{2j-1} + N_k\Phi_{2k-1}, \quad \psi = N_i\Phi_{2i} + N_j\Phi_{2j} + N_k\Phi_{2k}. \quad (5.11)$$

Или в матричной форме с учетом всех узловых значений компонент вектора

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_i\,0\,N_i\,0\,N_k\,0 \\ 0\,N_i\,0\,N_i\,0\,N_k \end{bmatrix} \mathbf{\Phi} >, \quad (5.12)$$

где $\mathbf{\Phi} > \left(\Phi_{2i-1}, \Phi_{2i}, \Phi_{2j-1}, \Phi_{2j}, \Phi_{2k-1}, \Phi_{2k}\right)^{\mathrm{T}}$. Так же поступают и для трехмерного случая.

Выше обсуждались интерполяционные соотношения для элементов МКЭ, при этом числовые значения узловых координат не фиксировались, так что размеры элемента и его ориентация могут быть выбраны исходя из решаемой задачи. Интерполяционный полином в общей форме, полученный выше, выглядит так

$$u^{(e)}(x,y) = <\mathbf{N\Phi}> = \left(N_i^{(e)}, N_j^{(e)}, N_k^{(e)}, ..., N_q^{(e)}\right)\left(\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k, ..., \Phi_q\right)^{\mathrm{T}}, \quad (5.13)$$

где q – число узлов элемента; верхний индекс (e) обозначает произвольный элемент.

Рассмотрим теперь *процедуру включения* каждого элемента в данную область на примере двумерной области, разбитой на пятиэлементную конфигурацию, для скалярных величин (рис. 5.4). Узлы пронумерованы от единицы до шести; значения $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_6$ – узловые значения функции $U(x,y)$ во всей области; координаты узлов $\left(X_q, Y_q\right)$, $q = 1, 2, ..., 6$ предполагаются известными и показаны на рис. 5.4. Для обозначения номеров узлов используются принятые выше индексы i, j, k после определения первого узла. На рис. 5.4 i-узел в каждом элементе выделен звездочкой, а узлы j, k следуют за i-узлом в направлении против часовой стрелки. Фиксирование первого узла дает возможность записать следующие равенства, например, для первого, второго и пятого элементов: $i = 2$, $j = 3$, $k = 1$ (элемент 1); $i = 3$, $j = 2$, $k = 4$ (элемент 2); $i = 1$, $j = 3$, $k = 6$ (элемент 5) и т.п. С помощью этих соотношений можно

осуществить включение элемента в область, так как они ставят в соответствие индексы элемента i, j, k глобальным номерам узлов и после подстановки в формулу (5.13) позволяют получить совокупность уравнений для элементов:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= N_2^{(1)}\Phi_2 + N_3^{(1)}\Phi_3 + N_1^{(1)}\Phi_1, \\ u^{(2)} &= N_3^{(2)}\Phi_3 + N_2^{(2)}\Phi_2 + N_4^{(2)}\Phi_4, \\ &..., \\ u^{(5)} &= N_1^{(5)}\Phi_1 + N_3^{(5)}\Phi_3 + N_6^{(5)}\Phi_6. \end{aligned} \quad (5.14)$$

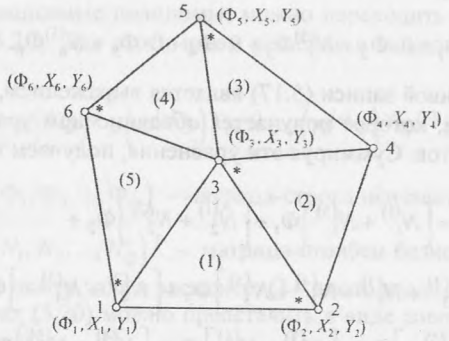


Рис. 5.4. Пример объединения двухмерной области анализа

Функции формы – множители при узловых значениях в формулах (5.12), определяются подстановкой числовых значений i, j, k в уравнения для функций формы. В обозначениях i, j, k функция формы $N_k^{(e)}$ записывается в виде

$$N_k^{(e)} = \frac{1}{2S^{(r)}}\left[a_k^{(e)} + b_k^{(e)}x + c_k^{(e)}y\right], \text{ где } \begin{cases} a_k^{(e)} = X_iY_j - X_jY_i, \\ b_k^{(e)} = Y_i - Y_j, \\ c_k^{(e)} = X_j - X_i. \end{cases} \quad (5.15)$$

Для пятого элемента $i = 1$, $j = 3$, $k = 6$. Подставляя эти значения в выражение (5.13), получим

$$N_6^{(5)} = \frac{1}{2S^{(5)}}\left[a_6^{(5)} + b_6^{(5)}x + c_6^{(5)}y\right], \text{ где } \begin{cases} a_6^{(5)} = X_1Y_3 - X_3Y_1, \\ b_6^{(5)} = Y_1 - Y_3, \\ c_6^{(5)} = X_3 - X_1. \end{cases} \quad (5.16)$$

С помощью уравнений (5.12) достигается основная цель МКЭ. Конечные элементы объединяются в ансамбль, а интерполяционные функции выражаются через глобальные узловые значения и глобальные координаты, которые вводятся вместо произвольных i, j и k, рассмотренных в п. 5.1.1, 5.1.2. Каждое из уравнений в системе (5.14) содержит глобальные узловые значения, но относится к конкретному элементу. Запишем расширенную форму этих уравнений, которая имеет вид

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= N_1^{(1)}\Phi_1 + N_2^{(1)}\Phi_2 + N_3^{(1)}\Phi_3 + 0\cdot\Phi_4 + 0\cdot\Phi_5 + 0\cdot\Phi_6, \\ u^{(2)} &= 0\cdot\Phi_1 + N_2^{(2)}\Phi_2 + N_3^{(2)}\Phi_3 + N_4^{(2)}\Phi_4 + 0\cdot\Phi_5 + 0\cdot\Phi_6, \\ &\ldots, \\ u^{(5)} &= \mathrm{N}_1^{(5)}\Phi_1 + 0\cdot\Phi_2 + N_3^{(5)}\Phi_3 + 0\cdot\Phi_4 + 0\cdot\Phi_5 + N_6^{(5)}\Phi_6. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Альтернативой записи (5.17) является выражением, определяющее область в целом, которое получается объединением уравнений для отдельных элементов. Суммируя эти уравнения, получаем из (5.17)

$$\begin{aligned} u = \sum_{e=1}^{N_e} u^{(e)} &= \left[N_1^{(1)} + N_1^{(5)}\right]\Phi_1 + \left[N_2^{(1)} + N_2^{(2)}\right]\Phi_2 + \\ &+ \left[N_3^{(1)} + N_3^{(2)} + N_3^{(3)} + N_3^{(4)} + N_3^{(5)}\right]\Phi_3 + \left[N_4^{(2)} + N_4^{(3)} + \right]\Phi_4 + \\ &+ \left[N_4^{(2)} + N_4^{(3)} + \right]\Phi_4 + \left[N_5^{(3)} + N_6^{(4)}\right]\Phi_5 + \left[N_6^{(4)} + N_6^{(5)}\right]\Phi_6, \end{aligned} \tag{5.18}$$

где N_e – число элементов в области решения. Включение элемента в рассматриваемую область при рассмотрении векторных величин проводится с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые приведены в случае скалярной величины.

5.2. Реализация метода конечных элементов процедурами Ритца и Бубнова–Галеркина

Процедура (алгоритм) Бубнова–Галеркина стартует с дифференциальных уравнений (п. 2.2), а процедура (алгоритм) Ритца – с вариационной формулировки задачи (п. 2.4). Процедуры имеют свои достоинства и недостатки.

5.2.1. Реализация алгоритмом Ритца

Рассмотрим некоторую электродинамическую задачу, сформулированную в виде операторного уравнения (2.11) относительно неизвестной функции u

$$\mathbf{L}u = f, \tag{5.19}$$

где оператор $\mathbf{L}$ – самосопряженный и положительно определенный (+) (Приложение 1). Будем для простоты полагать, что область определения оператора $\mathbf{L}$ действительная. Полезно сопоставить процедуры этого пункта с п. 2.5. Тогда в соответствии с вариационным подходом решение задачи (5.19) заменяется отысканием функций, реализующих минимум функционала (2.58)

$$Fu = \tfrac{1}{2}(\mathbf{L}u, u) - (f, u). \tag{5.20}$$

После того как проведена дискретизация области решения и получены интерполяционные полиномы, можно переходить к минимизации функционала (5.20). Для этого ищем решение в каждом (e)-сегменте в виде (5.13)

$$u^{(e)} = \sum_{j=1}^{Q} N_j^{(e)}\Phi_j^{(e)} = \left(\mathbf{\Phi}^{(e)}>\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{N}^{(e)}>=\left(\mathbf{N}^{(e)}>\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{(e)}>, \tag{5.21}$$

где $\left(\mathbf{\Phi}^{(e)}>\right)^{\mathrm{T}}=\left(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_Q\right)$ – матрица-строка неизвестных коэффициентов; $\mathbf{N}^{(e)}>=\left(N_1, N_2, \ldots, N_Q\right)^{\mathrm{T}}$ – матрица-столбец базисных функций в (e)-элементе; j – номер узла в элементе; Q – число узлов элемента.

Функционал (5.20) можно представить в виде совокупности функционалов $F^{(e)}\left(u^{(e)}\right)$ по всем $N^{(e)}$ элементам области

$$Fu = \sum_{e=1}^{N_e} F^{(e)}\left(u^{(e)}\right), \tag{5.22}$$

где

$$F^{(e)}\left(u^{(e)}\right) = \tfrac{1}{2}\int_{\Omega_e} u^{(e)}\mathbf{L}u^{(e)}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega_e} fu^{(e)}\mathrm{d}\Omega. \tag{5.23}$$

Подставляя выражение (5.21) в (5.23), будем иметь

$$\begin{aligned} F^{(e)} &= \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{\Phi}^{(e)}>\right)^{\mathrm{T}}\int_{\Omega_e}\mathbf{N}^{(e)}>\mathbf{L}\left(\mathbf{N}^{(e)}>\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\Omega\times \\ &\times\mathbf{\Phi}^{(e)}> - \left(\mathbf{\Phi}^{(e)}>\right)^{\mathrm{T}}\int_{\Omega_e} f\mathbf{N}^{(e)}>\mathrm{d}\Omega, \end{aligned} \tag{5.24}$$

которое можно записать в матричной форме

$$F^{(e)} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{\Phi}^{(e)}>\right)^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{K}^{(e)}\right]\mathbf{\Phi}^{(e)}> - \left(\mathbf{\Phi}^{(e)}>\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{b}^{(e)}>, \tag{5.25}$$

где $\left[\mathbf{K}^{(e)}\right]$ – $Q\times Q$ матрица; $\mathbf{b}^{(e)}>$ – $Q\times 1$ матрица-столбец, состоящие из следующих элементов:

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega_e} N_i^{(e)} \mathbf{L} N_j^{(e)} \mathrm{d}\Omega, \quad b_i^{(e)} >= \int_{\Omega_e} f N_i^{(e)} \mathrm{d}\Omega . \tag{5.26}$$

Заметим, что элементы матрицы $\left[\mathbf{K}^{(e)}\right]$ – симметричные в силу самосопряженности оператора **L**. Подставляя равенство (5.25) в (5.22), получаем

$$F = \sum_{e=1}^{N_e} \tfrac{1}{2} \left(\mathbf{\Phi}^{(e)}>\right)^{\mathrm{T}} \left[\mathbf{K}^{(e)}\right] \mathbf{\Phi}^{(e)} > - \left(\mathbf{\Phi}^{(e)}>\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{b}^{(e)} > . \tag{5.27}$$

Для конкретной области решения далее выполняется суммирование по всем элементам $N^{(e)}$ (процедура включения каждого элемента в рассматриваемую область) и переход к глобальной нумерации узлов аналогично уравнениям (5.17) в п. 5.1.3. В результате имеем

$$F = \tfrac{1}{2} (\mathbf{\Phi}>)^{\mathrm{T}} [\mathbf{K}] \mathbf{\Phi} > - (\mathbf{\Phi}>)^{\mathrm{T}} \mathbf{b} > , \tag{5.28}$$

где $[\mathbf{K}]$ – $N \times N$ симметричная матрица; N – полное число неизвестных значений или узлов; $\mathbf{\Phi}>$ – $N \times 1$ матрица-столбец неизвестных значений в узлах; $\mathbf{b}>$ – $N \times 1$ матрица-столбец известных значений. Условием минимизации функционала является (см. п. 2.5):

$$\frac{\partial F}{\partial \Phi_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \left(K_{ij} + K_{ji}\right) \Phi_j - b_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., N . \tag{5.29}$$

Поскольку $[\mathbf{K}]$ – симметричная матрица, то $K_{ij} = K_{ji}$ и соотношение (5.29) перепишем как

$$\frac{\partial F}{\partial \Phi_i} = \sum_{j=1}^{N} K_{ij} \Phi_j - b_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., N , \tag{5.30}$$

или в матричной форме

$$[\mathbf{K}] \mathbf{\Phi} >= \mathbf{b} > . \tag{5.31}$$

Возможен *альтернативный подход* для вывода соотношения (5.31). Сначала берутся производные от $F^{(e)}$ в записи (5.25) по $\Phi_i^{(e)}$

$$\frac{\partial F^{(e)}}{\partial \Phi_i^{(e)}} = \int_{\Omega_e} N_i^{(e)} \mathbf{L} \left(\mathbf{N}^{(e)}>\right)^T \mathrm{d}\Omega \mathbf{\Phi}^{(e)} > - \int_{\Omega_e} f N_i^{(e)} \mathrm{d}\Omega, \quad i = 1, 2, ..., Q , \tag{5.32}.$$

и переписываются далее в матричной форме

$$\frac{\partial F^{(e)}}{\partial \mathbf{\Phi}^{(e)}} >= \left[\mathbf{K}^{(e)}\right] \mathbf{\Phi}^{(e)} > - \mathbf{b}^{(e)} > , \tag{5.33}$$

где $\dfrac{\partial F^{(e)}}{\partial \mathbf{\Phi}^{(e)}} >= \left(\dfrac{\partial F^{(e)}}{\partial \Phi_1^{(e)}}, \dfrac{\partial F^{(e)}}{\partial \Phi_2^{(e)}}, ..., \dfrac{\partial F^{(e)}}{\partial \Phi_Q^{(e)}} \right)^{\mathrm{T}}$.

Чтобы получить систему относительно значений во всех глобальных узлах области $\mathbf{\Phi}>$, необходимо найти $\left(\partial F / \partial \mathbf{\Phi}\right)>$, где

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{\Phi}} >= \left(\frac{\partial F}{\partial \Phi_1}, \frac{\partial F}{\partial \Phi_2}, ..., \frac{\partial F}{\partial \Phi_Q} \right)^{\mathrm{T}} .$$

Поскольку только элементы, непосредственно объединенные i-узлом, вносят вклад в $\partial F / \partial \Phi_i$, то $\left(\partial F / \partial \mathbf{\Phi}\right)>$ может быть получено расширением (включение каждого элемента в область и переход к глобальной нумерации узлов аналогично уравнениям (5.17) в п. 5.1.3) $\left(\partial F^{(e)} / \partial \mathbf{\Phi}^{(e)}\right)>$ до $N \times 1$ столбца векторов в каждом элементе. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{\Phi}} >= \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial \tilde{F}^{(e)}}{\partial \mathbf{\Phi}^{(e)}} > , \tag{5.34}$$

где знак волны используется для обозначения расширенного вектора-столбца $\left(\partial F^{(e)} / \partial \mathbf{\Phi}^{(e)}\right)>$. Данная система уравнений должна удовлетворять условию стационарности

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{\Phi}} >= \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial \tilde{F}^{(e)}}{\partial \mathbf{\Phi}^{(e)}} >= \sum_{e=1}^{N_e} \left[\tilde{\mathbf{K}}^{(e)}\right] \tilde{\mathbf{\Phi}}^{(e)} > - \tilde{\mathbf{b}}^{(e)} > = \mathbf{0} > , \tag{5.35}$$

здесь $\left[\tilde{\mathbf{K}}^{(e)}\right]$ – расширенная по сравнению $\left[\mathbf{K}^{(e)}\right]$ и дополненная нулями с $N \times N$ симметричная матрица; соответственно $\tilde{\mathbf{\Phi}}^{(e)}>$ и $\tilde{\mathbf{b}}^{(e)}$ дополненные $N \times 1$ матрица-столбец. Подробно эти операции будут представлены в п. 5.3.2, а выражение (5.35) записано в форме (5.31). Рассмотренный альтернативный подход представлен, поскольку он схож с реализацией МКЭ алгоритмом Бубнова–Галеркина.

5.2.2. Реализация алгоритмом Бубнова–Галеркина

Для операторного уравнения (5.19) взвешенная невязка (2.73) для (e)-элемента принимает вид

$$R_i^{(e)} = \int_{\Omega_e} N_i^{(e)} \left(\mathbf{L} u^{(e)} - f\right) \mathrm{d}\Omega, \quad i = 1, 2, ..., Q . \tag{5.36}$$

Подставляя равенство (5.21) в (5.36), получаем выражение

$$R_i^{(e)} = \int_{\Omega_e} N_i^{(e)} \mathbf{L}(\mathbf{N}^{(e)}>)^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\Omega \mathbf{\Phi}^{(e)} > - \int_{\Omega_e} f N_i^{(e)} \mathrm{d}\Omega, \quad i = 1, 2, ..., Q, \qquad (5.37)$$

которое также можно записать в матричной форме

$$\mathbf{R}^{(e)}> = \left[\mathbf{K}^{(e)}\right] \mathbf{\Phi}^{(e)} > - \mathbf{b}^{(e)} >, \qquad (5.38)$$

где $\left(\mathbf{R}^{(e)}>\right)^{\mathrm{T}} = \left(R_1^{(e)}, R_2^{(e)}, ..., R_Q^{(e)}\right)$, а матричные элементы $K_{ij}^{(e)}$ и $b_i^{(e)}$ те же самые, что в формуле (5.26). Так как от оператора $\mathbf{L}$ не требовалось условие самосопряженности, матрица элементов $\left[\mathbf{K}^{(e)}\right]$ не обязательно симметричная. Поскольку процедура объединения элементов и взвешивающая функция связаны с i-узлом, можно объединить все элементы, соединяемые этим узлом, используя связь между локальными и глобальными узлами. Записав общую невязку по всем элементам $(\mathbf{R}>)^T = (R_1, R_2, ..., R_N)$ и приравняв ее нулю, получим систему уравнений относительно $\tilde{\mathbf{\Phi}}^{(e)}>$

$$\mathbf{R}> = \sum_{e=1}^{N_e} \tilde{\mathbf{R}}^{(e)} > = \sum_{e=1}^{N_e} \left[\tilde{\mathbf{K}}^{(e)}\right] \tilde{\mathbf{\Phi}}^{(e)} > - \tilde{\mathbf{b}}^{(e)} > = \mathbf{0} >, \qquad (5.39)$$

где знак волны означает, как и ранее, расширение и дополнение соответствующих матриц. Уравнение (5.39) можно представить в форме (5.34).

Прежде чем решать уравнение (5.34), необходимо удовлетворить требованиям граничных условий. Выделяют два типа граничных условий: естественные (например, однородные условия Неймана), которые выполняются неявно и автоматически в процессе решения, и *основные* (условия Дирихле, смешанные), которые необходимо налагать в явной форме. Частично эта проблема обсуждалась в п.п. 2.4.1 и будет рассмотрена на конкретном примере в п. 5.3.3.

5.3. Решение одномерных задач методом конечных элементов

Одномерный случай позволяет наиболее просто понять содержательную процедуру получения алгоритма решения и вычислительный процесс. Однако следует иметь в виду, что потенциал метода проявляется в полной мере в случае сложных трехмерных структур с неоднородным материалом и анизотропией.

5.3.1. Алгоритм решения

Рассмотрим одномерное скалярное уравнение Гельмгольца, которое можно считать в одномерном случае частным случаем уравнения ШЛ (2.8), (2.76) со всеми вытекающими свойствами для оператора. В данном случае уравнение (5.40) описывает распространение электромагнитной волны между параллельными металлическими пластинами

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{E}_y}{\mathrm{d}x^2} + k^2 \mathrm{E}_y(x) = g(x), \quad 0 \le x \le l. \qquad (5.40)$$

Решение будем искать, минимизируя следующий стационарный функционал из таблицы в п. 2.4.3,

$$F(\mathrm{E}_y) = \tfrac{1}{2} \int_0^l \left[\left(\mathrm{dE}_y/\mathrm{d}x\right)^2 - k^2 \mathrm{E}_y^2 + 2g\mathrm{E}_y \right] \mathrm{d}x. \qquad (5.41)$$

Выполняем процедуры п. 5.1 (рис. 5.5,*а*): делим область решения на N_e сегментов с размером $\Delta x = l/N_e$ и вводим координаты *глобальных* i-узлов: $x_i = (i-1)\Delta x$, $i = 1, 2, ..., Q$, где их число $Q = N_e + 1$. Поскольку два соседних элемента содержат общий узел, то вводятся *локальные* узлы, которые на рис. 5.5,*б* обозначены как $x_1^{(e)}$, $x_2^{(e)}$ (индекс (e) обозначает номер элемента). Локальные и глобальные узлы связаны соотношением

$$x_1^{(e)} = (e-1)\Delta x = x_e, \; x_2^{(e)} = e\Delta x = x_{e+1}, \quad e = 1, 2, ..., N_e. \qquad (5.42)$$

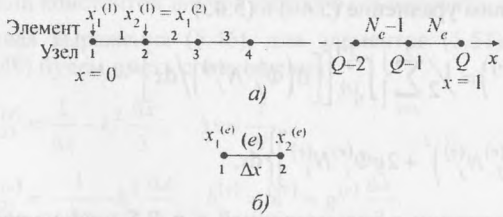


Рис. 5.5. Дискретизация области решения

Дискретизация области на элементы приводит к дискретизации функционала (5.41), в котором для упрощения записи положим $\mathrm{E}_y(x) = u(x)$. Тогда

$$F(\mathrm{E}_y) = \sum_{e=1}^{N_e} F^{(e)} u^{(e)}, \qquad (5.43)$$

где

$$F^{(e)}\left(u^{(e)}\right)=\tfrac{1}{2}\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}}\left[\left(\mathrm{d}u^{(e)}/\mathrm{d}x\right)^2-k^2\left(u^{(e)}\right)^2+2gu^{(e)}\right]\mathrm{d}x. \qquad (5.44)$$

Далее в соответствии с общим подходом представим решение задачи $u^{(e)}(x)$ на каждом сегменте в форме соотношения (5.13), конкретизировав аналогично (5.14) для каждого одномерного элемента и учитывая выражение (5.5):

$$u^{(e)}(x)=\sum_{j=1}^{2}N_j^{(e)}(x)\Phi_j^{(e)}, \qquad (5.45)$$

где $\Phi_j^{(e)}$ – значение функции в q-глобальном узле, а $N_j^{(e)}$ – функция формы на сегменте (e) с конкретизацией выражения (рис. 5.6)

$$N_1^{(e)}=\frac{x_2^{(e)}-x}{\Delta x},\quad N_2^{(e)}=\frac{x-x_1^{(e)}}{\Delta x},\quad x_1^{(e)}\le x\le x_2^{(e)}. \qquad (5.46)$$

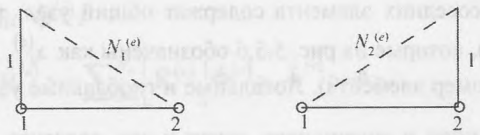


Рис. 5.6. Одномерные линейные интерполяционные функции

Подставим уравнение (5.46) в (5.45)

$$F^{(e)}\left(u^{(e)}\right)=\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left\{\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}}\left[\left[\mathrm{d}\left(\Phi_j^{(e)}N_j^{(e)}\right)/\mathrm{d}x\right]^2-\right.\right. \qquad (5.47)$$
$$\left.\left.-k^2\left(\Phi_j^{(e)}N_j^{(e)}\right)^2+2g\Phi_j^{(e)}N_j^{(e)}\right]\right\}\mathrm{d}x.$$

В соответствии с рассмотренной в п. 2.5 процедурой Ритца возьмем производные относительно неизвестных узловых значений $\Phi_j^{(e)}$

$$\frac{\partial F^{(e)}}{\partial\Phi_i^{(e)}}=\sum_{j=1}^{2}\Phi_j^{(e)}\left[\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}}\frac{\mathrm{d}N_i^{(e)}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}N_j^{(e)}}{\mathrm{d}x}-k^2N_i^{(e)}N_j^{(e)}\right]\mathrm{d}x+ \qquad (5.48)$$
$$+\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}}gN_i^{(e)}\,dx,\quad i=1,2.$$

Это уравнение может быть записано в матричной форме, аналогичной (5.33)

$$\frac{\partial F^{(e)}}{\partial\boldsymbol{\Phi}^{(e)}}>=\left[\mathbf{K}^{(e)}\right]\boldsymbol{\Phi}^{(e)}>-\mathbf{b}^{(e)}>,\quad e=1,2,...,N_e. \qquad (5.49)$$

Здесь

$$\boldsymbol{\Phi}^{(e)}>=\left(\Phi_1^{(e)},\Phi_2^{(e)}\right)^{\mathrm{T}},\ \mathbf{b}^{(e)}>=\left(b_1^{(e)},b_2^{(e)}\right)^{\mathrm{T}}, \qquad (5.50а)$$

$$\left[\mathbf{K}^{(e)}\right]=\begin{bmatrix}K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)}\\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)}\end{bmatrix}, \qquad (5.50б)$$

где элементы матрицы элементов $\left[\mathbf{K}^{(e)}\right]$ и $\mathbf{b}^{(e)}>$ определены в соответствии с выражением (5.48)

$$K_{ij}^{(e)}=\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}}\left[\frac{\mathrm{d}N_i^{(e)}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}N_j^{(e)}}{\mathrm{d}x}-k^2N_i^{(e)}N_j^{(e)}\right]\mathrm{d}x, \qquad (5.51)$$
$$b_i^{(e)}=\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}}g(x)N_i^{(e)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Матрица $\left[\mathbf{K}^{(e)}\right]$ – симметричная, а ее элементы, учитывая равенства (5.46), вычисляются аналитически при следующих предположениях: k^2 – постоянная величина в области решения или может быть аппроксимирована константой внутри каждого (e)-элемента, а $g(x)\approx g^{(e)}$. Тогда, учитывая выражения (5.46), для элементов (5.51) матричного уравнения (5.49) будем иметь соотношения

$$K_{11}^{(e)}=K_{22}^{(e)}=\frac{1}{\Delta x}-k^2\frac{\Delta x}{3},\quad \Delta x=\frac{l}{N_e}, \qquad (5.52)$$
$$K_{12}^{(e)}=K_{21}^{(e)}=-\frac{1}{\Delta x}-k^2\frac{\Delta x}{6},\quad b_1^{(e)}=b_2^{(e)}=g^{(e)}\frac{\Delta x}{2}.$$

5.3.2. Процедура объединения элементов

Перейдем в соответствии с условием (5.35) к процедуре объединения элементов области решения. Проиллюстрируем ее для области, показанной на рис. 5.7, состоящей из четырех элементов и пяти узлов. Соответственно расширенная матрица в (5.35) для первого элемента принимает вид

$$\left[\mathbf{K}^{(1)}\right]=\begin{bmatrix}K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)}\\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)}\end{bmatrix}\Rightarrow\left[\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}\right]=\begin{bmatrix}K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0\\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}^{(1)}>=\left(\Phi_1^{(1)},\Phi_2^{(1)},0,0,0\right)^{\mathrm{T}},\qquad(5.53\text{а})$$

$$\tilde{\mathbf{b}}^{(1)}>=\left(b_1^{(1)},b_2^{(1)},0,0,0\right)^{\mathrm{T}}.$$

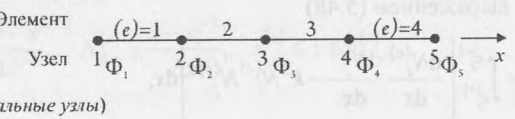


Рис. 5.7. Пример объединения одномерной области анализа

Аналогично для второго элемента

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}^{(2)}\right]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 & 0\\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}^{(2)}>=\left(0,\Phi_1^{(2)},\Phi_2^{(2)},0,0\right)^{\mathrm{T}},\qquad(5.53\text{б})$$

$$\tilde{\mathbf{b}}^{(2)}>=\left(0,b_1^{(2)},b_2^{(2)},0,0\right)^{\mathrm{T}}.$$

Такие же матрицы (векторы) записываются и для остальных элементов. Далее матрицы (векторы) различных элементов последовательно суммируются. В результате имеем глобальные матрицу и векторы $[\mathbf{K}]$, $\mathbf{\Phi}>$ и $\mathbf{b}>$, а матричное уравнение для нахождения значений решения в глобальных узлах можно записать в матричной $[\mathbf{K}]\mathbf{\Phi}>-\mathbf{b}>=\mathbf{0}>$ или развернутой форме

$$\begin{bmatrix}K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0\\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)}+K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 & 0\\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)}+K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} & 0\\ 0 & 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)}+K_{11}^{(4)} & K_{12}^{(4)}\\ 0 & 0 & 0 & K_{21}^{(4)} & K_{22}^{(4)}\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\\ \Phi_4\\ \Phi_5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}b_1^{(1)}\\ b_2^{(1)}+b_1^{(2)}\\ b_2^{(2)}+b_1^{(3)}\\ b_2^{(3)}+b_1^{(4)}\\ b_2^{(4)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}.\qquad(5.54)$$

При программировании задачи удобно было бы начинать с нулевой 5×5 матрицы $[\mathbf{K}]$, последовательно заполняя ее элемент за элементом.

5.3.3. Процедура учета граничных условий

Прежде чем решать уравнение (5.54), необходимо учесть граничные условия, что требуется для единственности решения. Предположим, что для рассматриваемого случая выполняются нулевые граничные условия: $\Phi_1=\Phi_5=0$. Тогда избавляемся от первого и последнего уравнений и полагаем $\Phi_1=\Phi_5=0$ везде, где они встречаются при умножении $[\mathbf{K}]\mathbf{\Phi}>$. Альтернативой является уничтожение первой и последней строк, а также первого и последнего столбца. В результате имеем

$$\begin{bmatrix}K_{22}^{(1)}+K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0\\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)}+K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)}\\ 0 & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)}+K_{11}^{(4)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_2\\ \Phi_3\\ \Phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_2^{(1)}+b_1^{(2)}\\ b_2^{(2)}+b_1^{(3)}\\ b_2^{(3)}+b_1^{(4)}\end{bmatrix},\qquad(5.55)$$

где $K_{ij}^{(e)}$, $b_i=b_2^{(i-1)}+b_1^{(i)}$ определены формулами (5.51), (5.52).

5.3.4. Численный пример

Обратимся вновь к уравнению (5.40) и конкретизируем его правую часть [21]

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{E}_y}{\mathrm{d}x^2}-\pi^2\mathrm{E}_y(x)=-2\pi^2\sin(\pi x),\quad 0\le x\le1\qquad(5.56)$$

с граничными условиями $\mathrm{E}_y(0)=\mathrm{E}_y(1)=0$. Легко проверить, что точное решение этого уравнения $\mathrm{E}_y(x)=\sin(\pi x)$. В соответствии с рис. 5.7 и формулами (5.51), (5.52)

$$\left[\mathbf{K}^{(e)}\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\Delta x}+\pi^2\frac{\Delta x}{3} & -\frac{1}{\Delta x}+\pi^2\frac{\Delta x}{6}\\ -\frac{1}{\Delta x}+\pi^2\frac{\Delta x}{6} & \frac{1}{\Delta x}+\pi^2\frac{\Delta x}{3}\end{bmatrix}, \tag{5.57а}$$

$$\Delta x=1/4=0,25,\quad e=1,2,3,4,$$

где $K_{11}^{(e)}=K_{22}^{(e)}=\frac{1}{\Delta x}+\pi^2\frac{\Delta x}{3}=4,8225$, $K_{12}^{(e)}=K_{21}^{(e)}=-\frac{1}{\Delta x}+\pi^2\frac{\Delta x}{6}=-3,589$ и соответственно

$$b_i^{(e)}=-2\pi^2\int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}}N_i^{(e)}(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.57б}$$

Здесь

$$b_1^{(e)}=-2\pi\left[\cos\left(\pi(e-1)\Delta x\right)-\frac{\alpha_e}{\pi\Delta x}\right],\ b_2^{(e)}=-2\pi\left[-\cos(\pi e\Delta x)+\frac{\alpha_e}{\pi\Delta x}\right],$$

где

$$\alpha_e=\sin(\pi e\Delta x)-\sin\left(\pi(e-1)\Delta x\right),$$

$$b_i=b_2^{(i-1)}+b_1^{(i)}=\frac{2}{\Delta x}\left[\sin\left(\pi(i-2)\Delta x\right)+\sin(i\pi\Delta x)\right].$$

Решая матричное уравнение (5.55), находим $[\Phi]=(0,\ 0,7055,\ 0,9977,\ 0,7055,\ 0)^{\mathrm{T}}$ и сравниваем его с аналитическим решением $(0,\ 0,707,\ 1,\ 0,707,\ 0)^{\mathrm{T}}$, полученным из $\sin(\pi x)$ – точного решения (5.56). Распределение поля получается как

$$\mathrm{E}_y(x)=\sum_{e=1}^{4}\sum_{j=1}^{2}N_j^{(e)}(x)\Phi_j^{(e)}. \tag{5.58}$$

Учитывая найденные значения распределения поля в глобальных узлах из (5.58), находим

$$\mathrm{E}_y(x)=0,7055\left(N_2^{(1)}(x)+N_1^{(2)}(x)+N_2^{(3)}(x)+N_1^{(4)}(x)\right)+$$
$$+0,9977\left(N_2^{(2)}(x)+N_1^{(3)}(x)\right). \tag{5.59}$$

Отсутствие в (5.59) функций $N_1^{(1)}(x)$ и $N_2^{(4)}(x)$ гарантирует выполнение граничных условий. Реконструированное поле показано на рис. 5.8.

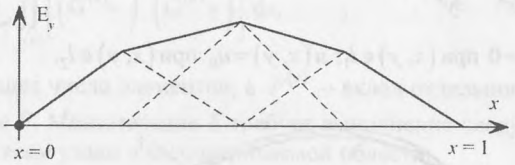


Рис. 5.8. Реконструированное поле

5.4. Решение двумерных задач в ограниченной области методом конечных элементов

Двумерный анализ уравнений Максвелла, решаемых МКЭ, существенно проще трехмерных, однако достаточно полно отражает без потери общности все аспекты решения, свойственные трехмерным задачам. Кроме того, двумерные задачи имеют большое практическое приложение: распространение волн E и H в волноводах сложного поперечного сечения, рассеяние электромагнитных волн на двумерных цилиндрических объектах, решение уравнений Лапласа и т.д.

5.4.1. Решение уравнения Лапласа

В многочисленных задачах электромагнетизма требуется решить двумерные уравнения Лапласа. Например, при решении двумерной электростатической задачи (п. 1.4.1) или изучении свойств Т-волны в коаксиальной линии передачи со сложным поперечным сечением проводников (см. п. 1.4.1, запись (1.55)). Решение электродинамических трехмерных задач отличается только более сложными математическими выражениями, не внося при этом нового физического содержания.

Выбранная нами структура состоит из двух металлических проводников: внешнего с границей l_1 и внутреннего границей l_2 (рис. 5.9), пространство между проводниками заполнено воздухом. Полагаем, что потенциал внешнего проводника равен нулю, а внутреннего – некоторой величине U_0 (напряжение между проводниками, создаваемое внешним источником). Для рассматриваемой электростатической задачи в соответствии с п. 1.4.1 требуется определить вектор напряженности электрического поля в области S между проводниками, связанный с потенциалом $u(x,y)$ соотношением $\mathbf{E}=-\nabla u=-\mathrm{grad}\,u$. Потенциал $u(x,y)$

находится из решения краевой задачи (1.32) (уравнение Лапласа с граничными условиями Дирихле):

$$\nabla_{\perp}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (5.60)$$

$$u(x,y) = 0 \text{ при } (x,y) \in l_1;\ u(x,y) = u_0 \text{ при } (x,y) \in l_2.$$

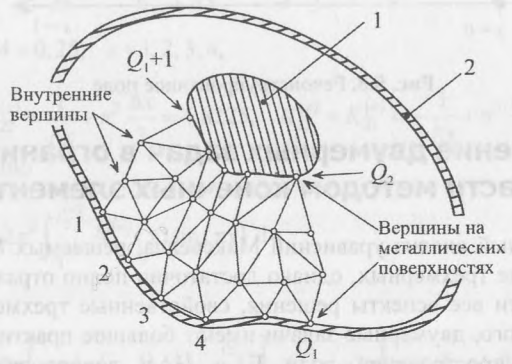


Рис. 5.9. Поперечное сечение структуры

На рис. 5.9 показана часть разбиения внутреннего пространства между проводниками на элементарные ячейки – треугольники. Вершины треугольников пронумерованы так, что первые Q_1 вершин лежат на внешнем проводнике, вершины с номерами от Q_1+1 до Q_2 лежат на внутреннем проводнике, а всего разбиение содержит Q вершин. Задача определения потенциала $u(x,y)$ в соответствии с таблицей в п. 2.4.3 может быть сведена к задаче минимизации следующего функционала $F(u)$ и последующего применения процедур п. 5.2.1:

$$F(u) = \tfrac{1}{2} \iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y . \qquad (5.61)$$

Введем для краткости записи матрицу $(\mathbf{G}>)^{\mathrm{T}} = (\partial u/\partial x, \partial u/\partial y)$ и, поскольку функции $u(x,y)$ не являются непрерывными во всей области, используем функции $u^{(e)}(x,y)$, определенные на отдельных элементах. Интегралы в формуле (5.61) должны быть разбиты на интегралы по отдельным элементам, что может быть записано в символической форме

$$F = F^{(1)} + F^{(2)} + \ldots + F^{(e)} = \sum_{e=1}^{N_e} F^{(e)} =$$
$$= \tfrac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_e} \iint_{S^{(e)}} \left[\left(\mathbf{G}^{(e)}> \right)^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{G}^{(e)}> \right) \right] \mathrm{d}s, \qquad (5.62)$$

где N_e – общее число элементов, а $F^{(e)}$ – вклад отдельного элемента в функционале F. Минимизация F требует выполнения следующего соотношения по всем узлам в рассматриваемой области:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{\Phi}>} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{\Phi}>} \sum_{e=1}^{N_e} F^{(e)} = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial F^{(e)}}{\partial \mathbf{\Phi}>} = 0 . \qquad (5.63)$$

Для вычисления частных производных $\partial F^{(e)} / \partial \mathbf{\Phi}>$ в выражении (5.63) запишем $u^{(e)}(x,y)$ для двумерного треугольного элемента с функцией формы (5.9) в виде соотношения (5.8) – $\mathrm{u}^{(e)} = <\mathbf{N}^{(e)}\mathbf{\Phi}> = \left(N_1^{(e)}, N_2^{(e)}, N_3^{(e)}\right)(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)^{\mathrm{T}}$, и определим $\mathbf{G}^{(e)}>$ как

$$\mathbf{G}^{(e)}> = \begin{bmatrix} \partial u^{(e)}/\partial x \\ \partial u^{(e)}/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial N_1^{(e)}/\partial x & \partial N_2^{(e)}/\partial x & \partial N_3^{(e)}/\partial x \\ \partial N_1^{(e)}/\partial y & \partial N_2^{(e)}/\partial y & \partial N_3^{(e)}/\partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix}, \qquad (5.64)$$

или $\mathbf{G}^{(e)}> = \left[\mathbf{B}^{(e)}\right]\mathbf{\Phi}>$,

где $\left[\mathbf{B}^{(e)}\right]$ содержит информацию о производной функций формы. Соответственно $F^{(e)}$ в формулах (5.62), (5.63) принимает вид

$$F^{(e)} = \tfrac{1}{2} \iint_{S^{(e)}} (\mathbf{\Phi}>)^{\mathrm{T}} \left[\mathbf{B}^{(e)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathbf{B}^{(e)}\right] \mathbf{\Phi}> \mathrm{d}s . \qquad (5.65)$$

Тогда

$$\frac{\partial F^{(e)}}{\partial \mathbf{\Phi}>} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{\Phi}>} \iint_{S^{(e)}} \frac{1}{2} (\mathbf{\Phi}>)^{\mathrm{T}} \left[\mathbf{B}^{(e)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathbf{B}^{(e)}\right] \mathbf{\Phi}> \mathrm{d}s =$$
$$= \iint_{S^{(e)}} \left[\mathbf{B}^{(e)}\right]^{\mathrm{T}} \left[\mathbf{B}^{(e)}\right] \mathbf{\Phi}> \mathrm{d}s, \qquad (5.66)$$

здесь учтено, что $\frac{\partial}{\partial \mathbf{\Phi}>} \left\{ (\mathbf{\Phi}>)^{\mathrm{T}} [\mathbf{A}] \mathbf{\Phi}> \right\} = 2[\mathbf{A}]\mathbf{\Phi}>$.

Окончательная СЛАУ порядка Q (Q – общее число вершин в разбиении области S) относительно значений потенциала в узловых точках получается после подстановки выражения (5.66) в (5.63):

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{\Phi}>}=\sum_{e=1}^{N_e}\frac{\partial F^{(e)}}{\partial \mathbf{\Phi}>}=\sum_{e=1}^{N_e}\left[\mathbf{k}^{(e)}\right]\mathbf{\Phi}>=[\mathbf{K}]\mathbf{\Phi}>=0, \tag{5.67}$$

где $\left[\mathbf{k}^{(e)}\right]=\iint\limits_{S^{(e)}}\left[\mathbf{B}^{(e)}\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{B}^{(e)}\right]ds$, $[\mathbf{K}]=\sum_{e=1}^{N_e}\left[\mathbf{k}^{(e)}\right]$.

Выделим в векторе $\mathbf{\Phi}>$ значения, соответствующие вершинам, лежащим на проводниках (outer) – $\mathbf{\Phi}_{out}>$ и внутри (inner) области S – $\mathbf{\Phi}_{in}>$: $\mathbf{\Phi}>=\left[\mathbf{\Phi}_{out}>,\mathbf{\Phi}_{in}>\right]^{\mathrm{T}}$. Тогда СЛАУ (5.24) приобретает следующий вид:

$$\begin{bmatrix}[\mathrm{K}_{oo}] & [\mathrm{K}_{io}]\\ [\mathrm{K}_{oi}] & [\mathrm{K}_{ii}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{\Phi}_{out}>\\ \mathbf{\Phi}_{in}>\end{bmatrix}=0. \tag{5.68}$$

Отметим, что вектор $\mathbf{\Phi}_{out}>$ известен, так как по условию задачи значения потенциала на проводниках заданы: $\mathbf{\Phi}_{o,n}>=0$ при $1\le n\le N_1$ и $\mathbf{\Phi}_{o,n}>=u_0$ при $N_1+1\le n\le N_2$. Решая СЛАУ (5.67) с учетом (5.68), находят все узловые значения $\mathbf{\Phi}_{\mathrm{i}}>$ в области S, а следовательно, и распределение потенциала $u(x,y)$ во всех точках области S. Выразив в записи (5.68) неизвестный вектор $\mathbf{\Phi}_{in}>$ через известный $\mathbf{\Phi}_{out}>$, получаем формальное решение искомой задачи

$$\mathbf{\Phi}_{in}>=-[\mathrm{K}_{ii}]^{-1}[\mathrm{K}_{oi}]\mathbf{\Phi}_{out}>. \tag{5.69}$$

Процедуры построения матриц элементов и объединения элементов области, аналогичные одномерному случаю, будут рассмотрены далее на примере решения скалярного уравнения Гельмгольца методом КЭ. Заметим, что МКЭ может быть успешно применен для анализа характеристик микрополосковой линии, проведенного в п. 3.4.2 (см. рис. 3.7) методом КР.

5.4.2. Решение скалярного уравнения Гельмгольца

Обратимся еще к одному примеру – задаче двумерного возбуждения и распространения волн в экранированных волноводах сложного сечения (см. например, рис. 5.10,*а*). Она сводится к решению задачи для неоднородного скалярного уравнения Гельмгольца относительно продольных компонент электрического E_z (магнитного H_z) поля:

$$\begin{aligned}&\nabla_\perp^2\mathrm{E}_z(x,y)+\chi^2\mathrm{E}_z(x,y)=g_1(x,y),\\ &\nabla_\perp^2\mathrm{H}_z(x,y)+\chi^2\mathrm{H}_z(x,y)=g_2(x,y)\end{aligned} \tag{5.70}$$

с граничными условиями на стенках волноводов $\mathrm{E}_z=0$ на $l_\perp$ для E-волн (условие Дирихле), $\partial\mathrm{H}_z/\partial n=\mathbf{n}\cdot\nabla\mathrm{H}_z=0$ на $l_\perp$ для H-волн (условие Неймана). Здесь $\nabla_\perp^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа в декартовой системе координат, $\mathbf{n}$ – нормаль к контуру $l_\perp$ волновода; $\chi^2=k^2-\gamma^2$, k – волновое число; γ – постоянная распространения; $g_{1,2}(x,y)$ – возбуждающая (сторонняя) функция. Поперечные составляющие электромагнитного поля $\mathbf{E}_\perp$, $\mathbf{H}_\perp$ выражаются через продольные E_z, H_z, используя выражения (1.52), (1.53), причем везде вместо x, y можно взять произвольные криволинейные ортогональные координаты. Полагая, что $u=\{\mathrm{E}_z,\mathrm{H}_z\}$, уравнения (5.70) можно записать единообразно:

$$\nabla_\perp^2\mathrm{u}(x,y)+\chi^2\mathrm{u}(x,y)=g(x,y),\ \ g=g_1,g_2,\ \mathrm{u}(x,y)\in S_\perp. \tag{5.71}$$

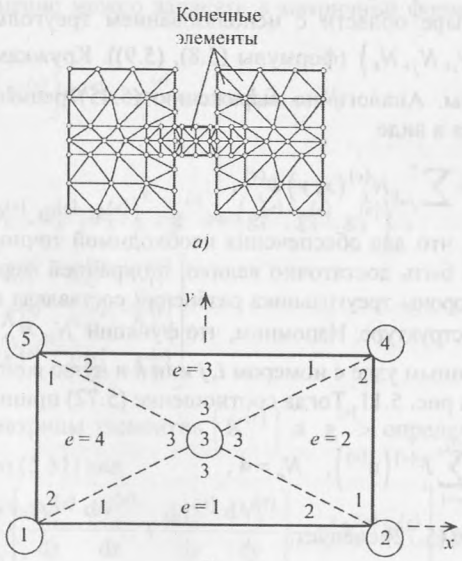


Рис. 5.10. Экранированные волноводы:
а – Н-образный; *б* – прямоугольный с треугольной сеткой

Вариационная формулировка МКЭ для записи (5.71) сводится к задаче минимизации следующего функционала $F(\mathrm{u})$ (см. таблицу в п. 2.4.3):

$$F(\mathrm{u})=\frac{1}{2}\iint_{S_\perp}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y}\right)^2-\chi^2\mathrm{u}^2+2g\mathrm{u}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (5.72)$$

Заметим, что для достижения функционалом $F(u)$ экстремального значения для точного решения U на пробные функции должно быть наложено для Е-волн граничное условие Дирихле. С другой стороны, условие Неймана ($\mathbf{n}\cdot\nabla \mathrm{H}_z=0$) играет роль естественного краевого условия, поскольку функция, удовлетворяющая требованию экстремальности $F(u)$, автоматически удовлетворяет и условию Неймана на $l_\perp$. Несмотря на то что дифференциальные уравнения, описывающие Е- и Н-волны, одинаковы, различные краевые условия для них приводят к существенно отличным свойствам двух типов волн.

Дискретизация функции формы. Для простоты рассмотрим последовательно все процедуры МКЭ на примере прямоугольного экранированного волновода (рис. 5.10,*б*), поперечное сечение $S_\perp$ которого разбито на четыре области с использованием треугольных функций формы $<\mathbf{N}=\left(N_i, N_j, N_k\right)$ (формулы (5.8), (5.9)). Кружками обозначены глобальные узлы. Аналогично выражению (5.45) решение на каждом элементе ищется в виде

$$\mathrm{u}^{(e)}(x,y)=\sum\nolimits_{j=1}^{3}N_j^{(e)}(x,y)\Phi_j^{(e)}. \qquad (5.73)$$

Очевидно, что для обеспечения необходимой точности число разбиений должно быть достаточно велико, по крайней мере необходимо, чтобы длина стороны треугольника разбиений составляла не более 0,1 от длины волны в структуре. Напомним, что функции N_i, N_j, N_k равны единице в одноименном узле с номером i, j или k и нулю в остальных узлах, что показано на рис. 5.11. Тогда соотношение (5.72) принимает вид:

$$F\left(\mathrm{u}^{(e)}\right)=\sum_{e=1}^{N_e}F^{(e)}\left(\mathrm{u}^{(e)}\right),\quad N_e=4, \qquad (5.74)$$

где из равенства (5.72) следует:

$$F(\mathrm{u}^{(e)})=\frac{1}{2}\iint_{S^{(e)}}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{u}^{(e)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathrm{u}^{(e)}}{\partial y}\right)^2-\chi^2\left(\mathrm{u}^{(e)}\right)^2+2g\mathrm{u}^{(e)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (5.75)$$

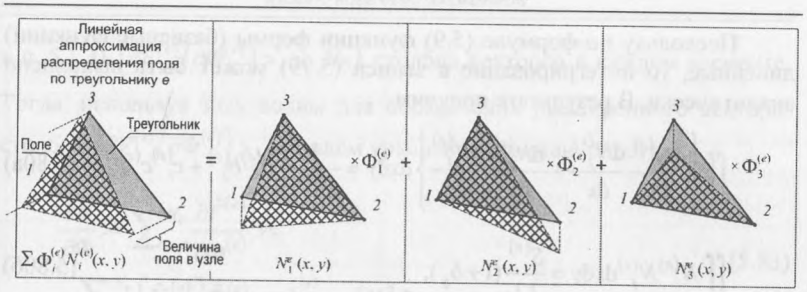


Рис. 5.11. Двумерные функции формы

Построение матрицы элементов. Подставляем выражение (5.73) в (5.75) и находим производные по неизвестным $\Phi_j^{(e)}$

$$\frac{\partial F^{(e)}}{\partial \Phi_i^{(e)}}=\sum\nolimits_{j=1}^{3}\Phi_j^{(e)}\left[\iint_{S^{(e)}}\left\{\frac{\mathrm{d}N_i^{(e)}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}N_j^{(e)}}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}N_i^{(e)}}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}N_j^{(e)}}{\mathrm{d}y}\right\}-\chi^2N_i^{(e)}N_j^{(e)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+$$
$$+\iint_{S^{(e)}}gN_i^{(e)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad e=1,2,...,N_e,\quad i=1,2,3. \qquad (5.76)$$

Это уравнение можно записать в матричной форме, аналогичной (5.49):

$$\frac{\partial F^{(e)}}{\partial \boldsymbol{\Phi}^{(e)}}>=\left[\mathbf{K}^{(e)}\right]\boldsymbol{\Phi}^{(e)}>+\mathbf{g}^{(e)}>,\quad e=1,2,...,N_e. \qquad (5.77)$$

Здесь

$$\boldsymbol{\Phi}^{(e)}>=\left(\Phi_1^{(e)},\Phi_2^{(e)},\Phi_3^{(e)}\right)^{\mathrm{T}},\ \mathbf{g}^{(e)}>=\left(g_1^{(e)},g_2^{(e)},g_3^{(e)}\right)^{\mathrm{T}}, \qquad (5.78а)$$

$$\left[\mathbf{K}^{(e)}\right]=\begin{bmatrix}K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} & K_{13}^{(e)}\\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} & K_{23}^{(e)}\\ K_{31}^{(e)} & K_{32}^{(e)} & K_{33}^{(e)}\end{bmatrix}, \qquad (5.78б)$$

где элементы матрицы элементов $\left[\mathbf{K}^{(e)}\right]$ и $\mathbf{g}^{(e)}>$ определены в соответствии с записью (5.51) как

$$K_{ij}^{(e)}=\left[\iint_{S^{(e)}}\left\{\frac{\mathrm{d}N_i^{(e)}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}N_j^{(e)}}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}N_i^{(e)}}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}N_j^{(e)}}{\mathrm{d}y}\right\}-\chi^2N_i^{(e)}N_j^{(e)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$
$$g_i^{(e)}=\iint_{S^{(e)}}gN_i^{(e)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;\quad i,j=1,2,3. \qquad (5.79)$$

Поскольку по формуле (5.9) функции формы (базисные функции) линейные, то интегрирование в записи (5.79) может быть выполнено аналитически. В результате получим

$$\iint\limits_{S^{(e)}} \left\{ \frac{dN_i^{(e)}}{dx}\frac{dN_j^{(e)}}{dx} + \frac{dN_i^{(e)}}{dy}\frac{dN_j^{(e)}}{dy} \right\} dxdy = \frac{1}{4S^{(e)}}\left[b_i^{(e)}b_j^{(e)} + c_i^{(e)}c_j^{(e)} \right], \quad (5.80а)$$

$$\iint\limits_{S^{(e)}} N_i^{(e)}N_j^{(e)}dxdy = \frac{S^{(e)}}{12}(1+\delta_{ij}), \quad (5.80б)$$

где $S^{(e)}$ – площадь треугольного элемента (5.9); δ_{ij} – символ Кронекера: $\delta_{ij}=1$ при $i=j$ и $\delta_{ij}=0$ при $i\neq j$. В результате для $K_{ij}^{(e)}$ имеем

$$K_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4S^{(e)}}\left[b_i^{(e)}b_j^{(e)} + c_i^{(e)}c_j^{(e)} \right] - \chi^2\frac{S^{(e)}}{12}(1+\delta_{ij}), \quad i,j=1,2,3. \quad (5.81)$$

Учитывая, что для произвольного ряда или столбца матрицы $\left[\mathbf{K}^{(e)}\right]$ выполняются уравнения

$$\sum\nolimits_i \left(b_i^{(e)}b_j^{(e)} + c_i^{(e)}c_j^{(e)} \right) = \sum\nolimits_j \left(b_i^{(e)}b_j^{(e)} + c_i^{(e)}c_j^{(e)} \right) = 0, \quad (5.82а)$$

и, следовательно,

$$\sum_i K_{ij}^{(e)} = \sum_j K_{ij}^{(e)} = \chi^2\frac{S^{(e)}}{3}. \quad (5.82б)$$

Уравнения (5.82) можно использовать для контроля найденных элементов матрицы $\left[\mathbf{K}^{(e)}\right]$. Элементы матрицы $\left[\mathbf{K}^{(e)}\right]$ рассчитаны аналитически, поскольку в соответствии с выражениями (5.70) параметр χ^2 определен однозначно при известном γ, а коэффициент $g_i^{(e)}$ в формулах (5.79) вычисляется после задания возбуждающей функции $g(x,y)$.

Объединение элементов и система уравнений. Матрица элементов и матричное вариационное представление задано формулой (5.77). Перейдем в соответствии с соотношением (5.35) к процедуре объединения элементов области решения. Поскольку только элементы, непосредственно объединенные i-узлом, вносят вклад в $\partial F/\partial\Phi_i$, то $\left(\partial F/\partial\mathbf{\Phi}\right)>$ может быть получено расширением (включение каждого элемента в область и переход к глобальной нумерации узлов аналогично записи (5.17)

в п. 5.1.3) $\left(\partial F^{(e)}/\partial\mathbf{\Phi}^{(e)}\right)>$ до $N\times1$ столбца векторов в каждом элементе. Тогда, используя знак волны для обозначения расширенного вектора-столбца $\left(\partial F^{(e)}/\partial\mathbf{\Phi}^{(e)}\right)>$, запишем уравнение стационарности

$$\frac{\partial F}{\partial\mathbf{\Phi}} >= \sum\nolimits_{e=1}^{N_e}\frac{\partial\tilde{F}^{(e)}}{\partial\mathbf{\Phi}^{(e)}} >= \\ = \sum\nolimits_{e=1}^{N_e}\left[\tilde{\mathbf{K}}^{(e)}\right]\tilde{\mathbf{\Phi}}^{(e)} > + \tilde{\mathbf{g}}^{(e)} >= \left[\mathbf{K}\right]\mathbf{\Phi} > + \mathbf{g} >= \mathbf{0} >, \quad (5.83)$$

где $\left[\tilde{\mathbf{K}}^{(e)}\right]$ – расширенная по сравнению $\left[\mathbf{K}^{(e)}\right]$ и дополненная нулями с $N\times N$ симметричная матрица; соответственно $\tilde{\mathbf{\Phi}}^{(e)}>$ и $\tilde{\mathbf{g}}^{(e)}$ дополненные $N\times1$ матрицы столбцы; $\left[\mathbf{K}\right]=\sum\limits_{e=1}^{N_e}\tilde{\mathbf{K}}^{(e)}$.

Перейдем в соответствии с уравнением (5.83) к процедуре объединения элементов области решения. Проиллюстрируем ее для области, показанной на рис. 5.10,*б*, состоящей из четырех элементов и пяти узлов. Расширенная матрица $\left[\tilde{\mathbf{K}}^{(e)}\right]$ в уравнении (5.83) для первого элемента принимает вид

$$\left[\mathbf{K}^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}^{(1)} >= \left(\Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(1)}, \Phi_3^{(1)} 0, 0\right)^{\mathrm{T}}, \quad \tilde{\mathbf{g}}^{(e)} >= \left(g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, g_3^{(1)} 0, 0\right)^{\mathrm{T}}. \quad (5.84а)$$

Аналогично для второго элемента

$$\left[\tilde{\mathbf{K}}^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{13}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.84б)$$

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}^{(2)} >= \left(0, \Phi_2^{(2)}, \Phi_3^{(2)}, \Phi_4^{(2)}, 0\right)^{\mathrm{T}}, \quad \tilde{\mathbf{g}}^{(2)} >= \left(0, b_2^{(2)}, b_3^{(2)}, b_4^{(2)}, 0\right)^{\mathrm{T}}.$$

Такие же матрицы (векторы) записываем и для оставшихся двух элементов. Далее матрицы (векторы) различных элементов последовательно суммируем. В результате получаем глобальные матрицу и векторы $[\mathbf{K}]$, $\mathbf{\Phi}>$ и $\mathbf{g}>$, а матричное уравнение для нахождения значений решения в глобальных узлах можно записать в матричной $[\mathbf{K}]\mathbf{\Phi}>+\mathbf{g}>=\mathbf{0}>$ или развернутой форме:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)}+K_{22}^{(4)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)}+K_{23}^{(4)} & 0 & K_{21}^{(4)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)}+K_{11}^{(2)} & K_{23}^{(1)}+K_{13}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 \\ K_{31}^{(1)}+K_{32}^{(4)} & K_{32}^{(1)}+K_{31}^{(2)} & \sum_{i=1}^{4} g_{33}^{(i)} & K_{32}^{(2)}+K_{31}^{(3)} & K_{32}^{(3)}+K_{31}^{(4)} \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{23}^{(2)}+K_{13}^{(3)} & K_{22}^{(2)}+K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} \\ K_{12}^{(4)} & 0 & K_{23}^{(3)}+K_{13}^{(4)} & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)}+K_{11}^{(4)} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1^{(1)}+g_2^{(4)} \\ g_2^{(1)}+g_1^{(2)} \\ \sum_{i=1}^{4} g_3^{(i)} \\ g_2^{(2)}+g_1^{(3)} \\ g_2^{(3)}+g_1^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (5.85)$$

Численный пример. Проиллюстрируем рассмотренную процедуру для определения критической частоты (частоты среза) для волны электрического типа E_{11} прямоугольного металлического волновода с размерами $a = 1$ см, $b = 0{,}5$ см, т.е. $a/b = 2$, дискретизированного достаточно грубо: четыре элемента, 5 глобальных и 12 локальных узлов (рис. 5.10,*б*). Координаты глобальных узлов указаны в табл. 5.1. В соответствии с выражениями (5.70), (5.71) полагаем нулевой правую часть, а для критической частоты постоянная распространения $\gamma = 0$ и $\chi^2 = k^2$. Далее последовательно вычисляем коэффициенты a_i, b_i, c_i каждого элемента по формулам (5.9). Результаты отражены в табл. 5.2.

Таблица 5.1

Глобальные узлы, №	Координаты		Глобальные узлы, №	Координаты	
	x	y		x	y
1	–0,5	0	4	0,5	0,5
2	0,5	0	5	–0,5	0,5
3	0	0,25			

Таблица 5.2

Элементы, №	(a_1, b_1, c_1)	(a_2, b_2, c_2)	(a_3, b_3, c_3)
1	1/8, –1/4, –1/2	–1/8, 1/4, –1/2	0, 0, 1
2	1/8, 1/4, –1/2	–1/8, 1/4, 1/2	1/84, –1/2, 0
3	–1/8, 1/4, 1/2	–1/8, –1/4, 1/2	1/2, 0, 1
4	1/8, –1/4, 1/2	1/8, –1/4, –1/2	1/4, –1/2, 0

После вычисления коэффициентов матрицы элементов $K_{ij}^{(e)}\,(i, j = 1, 2, 3)$ и их объединения получаем для уравнения (5.85) следующее выражение:

$$\begin{bmatrix} -5/4+k^2/24 & -3/8+k^2/96 & 5/4+k^2/48 & 0 & 3/8+k^2/96 \\ -3/8+k^2/96 & -5/4+k^2/24 & 5/4+k^2/48 & 3/8+k^2/96 & 0 \\ 5/4+k^2/48 & 5/4+k^2/48 & -5+k^2/12 & 5/4+k^2/48 & 5/4+k^2/48 \\ 0 & 3/8+k^2/96 & 5/4+k^2/48 & -5/4+k^2/24 & -3/8+k^2/96 \\ 3/8+k^2/96 & 0 & 5/4+k^2/48 & -3/8+k^2/96 & -5/4+k^2/24 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (5.86)$$

Для волн Е-типа на стенках волновода должно выполняться граничное условие Дирихле: $E_z = 0$, значит, $\Phi_i = 0$, $i = 1, 2, 4, 5$. Следуя процедуре учета граничных условий, например в п. 5.3.3, вычеркиваем соответствующие строки и столбцы матрицы (5.86). В результате остается элемент матрицы K_{33}, соответствующий уравнению для определения частоты среза:

$$-5 + k_{\text{кр}}^2/12 = 0, \text{ или } k_{\text{кр}}^2 = \sqrt{60} = 7{,}746 \text{ и } \lambda_{\text{кр}} = 2\pi/k_{\text{кр}} = 0{,}81 \text{ см}. \qquad (5.87)$$

Аналитическое решение для волны E_{11} известно [12]: $k_{\text{кр}}^a = \sqrt{(\pi/a)^2 + (\pi/b)^2}$ и при $a = 1$ см, $b = 0{,}5$ см частота среза равна $k_{\text{с}}^a = 2/236\pi = 7{,}0246$. Ошибка вычисления $k_{\text{кр}}$ составила 10,26 %. Точность нахождения $k_{\text{кр}}$ существенно повышается при увеличении числа

элементов разбиения. Так уже при 16 элементах ошибка вычисления $k_{кр}$ составила 2,58 %.

Рассматриваемый подход можно использовать для вычисления собственных значений и собственных функций экранированных линий передачи. Для этого следует положить в выражении (5.86) возбуждающий столбец $\mathbf{g} >= \mathbf{0}>$, обозначить в соответствии с уравнениями (5.70) $k^2 = \chi^2$ и представить соотношение (5.86) в виде $\left[\mathbf{A} - \chi^2 \mathbf{B}\right]\mathbf{\Phi} >= \mathbf{0}>$, где матрица $[\mathbf{K}]$ очевидным образом записана в виде суммы двух матриц.

5.5. Решение двухмерных задач рассеяния методом конечных элементов с алгоритмом взвешенной невязки

Пусть на бесконечно протяженный металлический цилиндр, окруженный диэлектрическим слоем, падает с направления φ_0 плоская линейно поляризованная волна (для определенности рассмотрим случай ТЕ поляризации):

$$\mathrm{H}_z^{\text{пад}} = \mathbf{z}_0 \exp ik_0 \left(x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0\right). \tag{5.88}$$

Геометрия задачи представлена на рис. 5.12. Электрофизические параметры $\varepsilon_a = \varepsilon_0\varepsilon$, $\mu_a = \mu_0\mu$ области решения полагаются неоднородными, а в качестве источника возбуждения задан вектор плотности стороннего магнитного тока $\mathbf{z}_0 M_z^{cm}$.

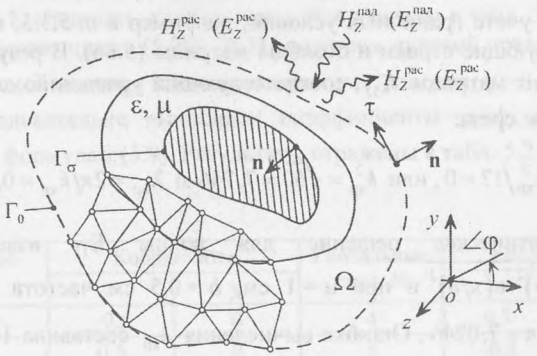


Рис. 5.12. Двумерная область решения задачи рассеяния

Получение волнового уравнения для случая неоднородной среды подробно рассмотрено в п.п. 5.6.1, а скаляризация векторных двумерных задач – в п.п. 6.2.1. Соответственно волновое уравнение (см., например, (5.115)), учитывая независимость от координаты z, принимает вид

$$\nabla_\perp \times \left\{\frac{\nabla_\perp \times \left(\mathbf{z}_0 \mathrm{H}_z\right)}{\varepsilon}\right\} - \mathbf{z}_0 k_0^2 \mu \mathrm{H}_z = -\mathbf{z}_0 i\omega\varepsilon_0 M_z^{\text{ст}}, \tag{5.89}$$

которое, с привлечением векторного тождества $\nabla\times\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right) = \mathbf{A}\nabla\cdot\mathbf{B} - \mathbf{B}\nabla\cdot\mathbf{A} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$, можно привести к скалярному волновому уравнению (5.117) для неоднородной среды

$$\nabla_\perp \left\{\frac{1}{\varepsilon}\nabla_\perp \mathrm{H}_z\right\} + k_0^2 \mu \mathrm{H}_z = i\omega\varepsilon_0 M_z^{\text{ст}}. \tag{5.90}$$

Здесь $\nabla_\perp = \nabla = \mathbf{x}_0\,\partial/\partial x + \mathbf{y}_0\,\partial/\partial y$ – оператор Гамильтона по поперечным координатам, H_z – z-компонента полного магнитного поля, состоящего из рассеянного поля $\mathrm{H}_z^{\text{рас}}$, представляющего основной интерес, и падающего $\mathrm{H}_z^{\text{пад}}$, т.е. $\mathrm{H}_z = \mathrm{H}_z^{\text{рас}} + \mathrm{H}_z^{\text{пад}}$. Подставляя последнее выражение в формулу (5.90), получаем уравнение для рассеянного поля

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}\nabla \mathrm{H}_z^{\text{рас}}\right) + k_0^2\mu\mathrm{H}_z^{\text{рас}} = -\nabla\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}\nabla \mathrm{H}_z^{\text{пад}}\right) - \\ &-k_0^2\mu\mathrm{H}_z^{\text{пад}} + i\omega\varepsilon_0 M_z^{\text{ст}} = f(x,y).\end{aligned} \tag{5.91}$$

В соответствии с п. 5.2.2 записываем равенство (5.91) в форме невязки

$$R = \nabla\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}\nabla \mathrm{H}_z^{\text{рас}}\right) + k_0^2\mu\mathrm{H}_z^{\text{рас}} - f(x,y) \tag{5.92}$$

и удовлетворяем в среднем (интегрально) требованию $\mathbf{R} = 0$ в области решения Ω, взвешенной функциями w, невязки (5.36):

$$\int_\Omega w(x,y)\,R(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \tag{5.93}$$

В результате после применения векторного тождества и теоремы о дивергенции имеем

$$\begin{aligned}&w\nabla\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}\nabla \mathrm{H}_z^{\text{рас}}\right) = \nabla\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}w\nabla \mathrm{H}_z^{\text{рас}}\right) - \frac{1}{\varepsilon}\nabla w\cdot\nabla \mathrm{H}_z^{\text{рас}}, \\ &\int_\Omega \nabla\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}w\nabla \mathrm{H}_z^{\text{рас}}\right)\mathrm{d}s = \oint_\Gamma \frac{1}{\varepsilon}w\left(\nabla \mathrm{H}_z^{\text{рас}}\cdot\mathbf{n}\right)\mathrm{d}l,\end{aligned} \tag{5.94}$$

где Г – контур, ограничивающий область решения Ω, а $\mathbf{n}$ – единичная, внешняя к Ω, нормаль (см. рис. 5.12). Получаем так называемую слабую форму волнового уравнения:

$$\int_{\Omega}\left[-\frac{1}{\varepsilon}\nabla w\cdot\nabla \mathrm{H}_z^{\text{рас}}+k_0^2\mu w\mathrm{H}_z^{\text{рас}}-wf\right]\mathrm{d}s+\oint_{\Gamma}\frac{1}{\varepsilon}w\left(\mathbf{n}\cdot\nabla \mathrm{H}_z^{\text{рас}}\right)\mathrm{d}l=0. \quad (5.95)$$

Отметим наличие интеграла по границе области решения, позволяющего ввести в формулу (5.95) граничные условия как на внутренней Γ_σ границе, так и на внешней Γ_0 (см. рис. 5.11). Полагаем далее, что $\mathrm{H}_z^{\text{пад}}$ находится по формуле (5.88), $M_z^{\text{ст}}=0$. Тогда определенная в выражении (5.91) функция f для элемента разбиения области, в котором $\varepsilon=\varepsilon^{(e)}$, $\mu=\mu^{(e)}$, равна

$$\begin{aligned} f^{(e)} &= -\nabla\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}\nabla \mathrm{H}_z^{\text{пад}}\right)-k_0^2\mu\mathrm{H}_z^{\text{пад}}= \\ &= k_0^2\left(\frac{1}{\varepsilon^{(e)}}-\mu^{(e)}\right)e^{ik_0(x\cos\varphi_0+y\sin\varphi_0)}=k_0^2\left(\frac{1}{\varepsilon^{(e)}}-\mu^{(e)}\right)\mathrm{H}_z^{\text{пад}}. \end{aligned} \quad (5.96)$$

В соответствии с МКЭ дискретизируем соотношение (5.95), представляя рассеянное поле в следующем виде:

$$\mathrm{H}_z^{\text{рас}}(x,y)=\sum_{e=1}^{N_e}\mathrm{H}_z^{p(e)}=\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{j=1}^{3}\mathrm{H}_{zj}^{p(e)}N_j^{(e)}(x,y), \quad (5.97)$$

где $\mathrm{H}_{zj}^{p(e)}$ – значение рассеянного поля в Ω_e-элементе разбиения; $N_j^{(e)}$ – узловые функции треугольного элемента (5.9). Подставив (5.97) в (5.95), определив полную границу Г как объединение внутренней проводящей Γ_σ и внешней Γ_0 границ (см. рис. 5.12) – $\Gamma=\Gamma_\sigma+\Gamma_0$, и в соответствии с алгоритмом Галеркина, взяв $w=N_i^{(e)}$, получаем для уравнения (5.95) следующее выражение:

$$\begin{aligned} &\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{j=1}^{3}\mathrm{H}_{zj}^{p(e)}\int_{\Omega_e}\left[-\frac{1}{\varepsilon^{(e)}}\nabla N_i^{(e)}\cdot\nabla N_j^{(e)}+k_0^2\mu N_i^{(e)}N_j^{(e)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+ \\ &+\sum_{S_\sigma=1}^{N_{S_\sigma}}\oint_{\Gamma_\sigma}\frac{1}{\varepsilon}N_i^{(e)}\left(\mathbf{n}\cdot\nabla \mathrm{H}_z^{\text{рас}}\right)\mathrm{d}l+\sum_{S_0=1}^{N_{S_0}}\oint_{\Gamma_0}\frac{1}{\varepsilon}N_i^{(e)}\left(\mathbf{n}\cdot\nabla \mathrm{H}_z^{\text{рас}}\right)\mathrm{d}l= \\ &=\sum_{e=1}^{N_e}\int_{\Omega_e}N_i^{(e)}f^{(e)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad i=1,2,3. \end{aligned} \quad (5.98)$$

В формуле (5.98) предполагается (см. рис. 5.12), что внутренняя область (диэлектрик и свободное пространство) разбита на треугольни-

ки, в то время как контуры Γ_σ и Γ_0 поделены на N_{S_σ} и N_{S_0} линейных сегментов соответственно. Перед вычислением уравнения (5.98) уточним граничные условия на Γ_σ и Γ_0.

На контуре Γ_σ для полного поля должно выполняться однородное граничное условие Неймана

$$\mathbf{n}\cdot\nabla \mathrm{H}_z=\mathbf{n}\cdot\left(\nabla \mathrm{H}_z^{\text{рас}}+\nabla \mathrm{H}_z^{\text{пад}}\right)=0 \text{ или}$$

$$\mathbf{n}\cdot\nabla \mathrm{H}_z^{\text{рас}}=-\mathbf{n}\cdot\nabla \mathrm{H}_z^{\text{пад}},\quad (x,y)\in\Gamma_\sigma, \quad (5.99)$$

которое является неоднородным граничным условием Неймана, где $\mathbf{n}\cdot\nabla \mathrm{H}_z^{\text{пад}}$ – известная в силу условий задачи величина на Γ_σ. Альтернативная форма (5.99) записывается, если учесть, что для рассматриваемого случая ТЕ поляризации и двумерной задачи для полного поля из уравнений электродинамики имеем связь

$$\mathbf{E}=\frac{iZ}{k}\mathbf{z}_0\times\nabla \mathrm{H}_z, \quad (5.100)$$

где $Z=Z_0\sqrt{\mu/\varepsilon}$, $k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}k_0$. Тогда для тангенциальной компоненты полного поля $\mathrm{E}_\tau=\boldsymbol{\tau}_0\cdot\mathbf{E}$, полагая, что в области решения (см. рис. 5.12) $\mu_a=\mu_0$, имеем

$$\mathrm{E}_\tau=\boldsymbol{\tau}_0\mathbf{E}=\frac{iZ_0}{k_0}\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{\tau}_0\left(\mathbf{z}_0\times\nabla \mathrm{H}_z\right)=\frac{iZ_0}{k_0}\frac{1}{\varepsilon}\nabla \mathrm{H}_z\left(\boldsymbol{\tau}_0\times\mathbf{z}_0\right)=\frac{iZ_0}{k_0}\frac{1}{\varepsilon}\nabla \mathrm{H}_z\mathbf{n}. \quad (5.101)$$

Аналогичное соотношение можно записать для рассеянного поля $\mathrm{E}_\tau^{\text{рас}}$:

$$\frac{ik_0}{Z_0}\mathrm{E}_\tau^{\text{рас}}=-\frac{1}{\varepsilon}\nabla \mathrm{H}_z^{\text{рас}}\cdot\mathbf{n}. \quad (5.102)$$

И поскольку полное поле $\mathrm{E}_\tau=\mathrm{E}_\tau^{\text{пад}}+\mathrm{E}_\tau^{\text{рас}}=0$ на проводящей поверхности, имеем граничное условие

$$\frac{1}{\varepsilon}\nabla \mathrm{H}_z^{\text{рас}}\cdot\mathbf{n}=\frac{ik_0}{Z_0}\mathrm{E}_\tau^{\text{пад}},\quad (x,y)\in\Gamma_\sigma. \quad (5.103)$$

На контуре Γ_0 для рассеянного поля должно выполняться граничное условие

$$\frac{\partial \mathrm{H}_z^{\text{рас}}}{\partial n}+\left(ik_0+\frac{1}{2r_0}\right)\mathrm{H}_z^{\text{рас}}=0,\quad (x,y)\in\Gamma_0, \quad (5.104)$$

которое получено из следующих соображений. Поле на большом расстоянии от двумерного рассеивателя может быть представлено в форме $Ae^{-ik_0r}/\sqrt{r}$, где A – константа; r – расстояние от рассеивателя. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[e^{-ik_0r}/\sqrt{r}\right]=-ik_0\frac{e^{-ik_0r}}{\sqrt{r}}-\frac{1}{2}\frac{e^{-ik_0r}}{r^{3/2}}. \tag{5.105}$$

И следовательно, $\mathrm{H}_z^{\text{рас}}$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \mathrm{H}_z^{\text{рас}}}{\partial r}+\left(ik_0+\frac{1}{2r}\right)\mathrm{H}_z^{\text{рас}}=0,\quad r\to\infty. \tag{5.106}$$

Поскольку для кругового контура Γ_0 радиуса r_0 направление **r** совпадает с **n**, то мы приходим к формуле (5.104), которая представляет собой так называемое поглощающее граничное условие (подробно см. в гл. 4). Это граничное условие на Γ_0 должно обеспечивать распространение на границе рассеянного поля без искажения и отражений . Условия (5.103) и (5.104) непосредственно вносятся в основное уравнение (5.98). В результате получаем

$$\oint_{\Gamma_\sigma}\frac{1}{\varepsilon}N_i^{(e)}\left(\mathbf{n}\cdot\nabla\mathrm{H}_z^{\text{рас}}\right)\mathrm{d}l=\frac{ik_0}{Z_0}\oint_{\Gamma_\sigma}N_i^{(e)}\mathrm{E}_\tau^{\text{пад}}\,\mathrm{d}l, \tag{5.107а}$$

– вычисляемый интеграл, так как известны $N_i^{(e)}$ и значение $\mathrm{E}_\tau^{\text{пад}}$, трансформируемое в правую часть равенства (5.98):

$$\oint_{\Gamma_0}\frac{1}{\varepsilon}N_i^{(e)}\left(\mathbf{n}\cdot\nabla\mathrm{H}_z^{\text{рас}}\right)\mathrm{d}l=-\oint_{\Gamma_0}\frac{1}{\varepsilon}N_i^{(e)}\left(ik_0+\frac{1}{2r_0}\right)\mathrm{H}_z^{\text{рас}}\,\mathrm{d}l. \tag{5.107б}$$

Дискретизируем выражение (107б), представляя рассеянное поле на ограничивающем область решения контуре как

$$\mathrm{H}_z^{\text{рас}}(x,y)=\sum_{S_0=1}^{N_{S_0}}\sum_{j=1}^{2}\mathrm{H}_{zj}^{p(s_0)}N_j^{(s_0)}, \tag{5.108}$$

где N_{S_0} – число сторон (ребер, линейных сегментов) на границе контура Γ_0; $\mathrm{H}_{zj}^{p(s_0)}$ – значение рассеянного магнитного поля в j-локальном узле Γ_0 сегмента на границе контура; $N_j^{(s_0)}$ – базисные линейные функции, определяемые по узлам S_0 сегмента аналогично записи (5.46):

$$N_1^{(s_0)}=\begin{cases}\dfrac{x_2^{(s_0)}-x}{\Delta x} & \text{при } y|_{\Gamma_0}=\text{const},\\[2ex] \dfrac{y_2^{(s_0)}-y}{\Delta y} & \text{при } x|_{\Gamma_0}=\text{const},\ N_2^{(s_0)}=1-N_1^{(s_0)},\ (x,y)\in\Gamma_0.\end{cases} \tag{5.109}$$

Подставляя выражение (5.108) в (5.107б) находим для S_0 сегмента, ограничивающего контура

$$-\oint_{\Gamma_0}\frac{1}{\varepsilon}N_i^{(e)}\left(ik_0+\frac{1}{2r_0}\right)\mathrm{H}_z^{\text{рас}}\,dl=$$
$$=-\sum_{S_0=1}^{N_{S_0}}\sum_{j=1}^{2}\mathrm{H}_{zj}^{p(s_0)}\frac{1}{\varepsilon^{(S_0)}}\left[\left(ik_0+1/2r_0\right)\oint_{\Gamma_{S_0}}N_i^{(s_0)}N_j^{(s_0)}\,dl\right]. \tag{5.110}$$

Учитывая соотношения (5.107) и (5.96), представим слабую форму волнового уравнения (5.98) в виде, подготовленном к решению, т.е. учитывающем волновое уравнение и граничные условия:

$$\sum_{e=1}^{N_e}\sum_{j=1}^{3}\mathrm{H}_{zj}^{p(e)}\int_{\Omega_e}\left[-\frac{1}{\varepsilon^{(e)}}\nabla N_i^{(e)}\cdot\nabla N_j^{(e)}+k_0^2\mu^{(e)}N_i^{(e)}N_j^{(e)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$
$$-\sum_{S_0=1}^{N_{S_0}}\sum_{j=1}^{2}\mathrm{H}_{zj}^{p(s_0)}\frac{1}{\varepsilon^{(s_0)}}\left[\left(ik_0+1/2r_0\right)\oint_{\Gamma_{S_0}}N_i^{(s_0)}N_j^{(s_0)}\,\mathrm{d}l\right]=$$
$$=\sum_{e=1}^{N_e}\int_{\Omega_e}N_i^{(e)}\mathrm{H}_z^{\text{пад}}k_0^2\left[\frac{1}{\varepsilon^{(e)}}-\mu^{(e)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y- \tag{5.111}$$
$$-\sum_{S_\sigma=1}^{N_{S_\sigma}}\frac{ik_0}{Z_0}\oint_{\Gamma_{S_\sigma}}N_i^{(e)}\mathrm{E}_\tau^{\text{пад}}\mathrm{d}l,\quad i=1,2,3.$$

где S_0 и S_σ – сегменты (e) ограничивающей и проводящей поверхностей области решения, принадлежащие (e) элементу разбиения области решения.

Уравнение (5.111) можно представить в матричной форме

$$\sum_{e=1}^{N_e}\left[\mathbf{A}^{(e)}\right]\mathbf{H}_z^{p(e)}>+\sum_{S_0=1}^{N_{S_0}}\left[\mathbf{B}^{(s_0)}\right]\mathbf{H}_z^{p(s_0)}>=\sum_{e=1}^{N_e}\mathbf{b}^{(e)}>, \tag{5.112}$$

где элементы матриц вычисляются из следующих соотношений:

$$\mathrm{A}_{ij}^{(e)}=-\frac{1}{\varepsilon^{(e)}}\int_{\Omega_e}\left[\nabla N_i^{(e)}\cdot\nabla N_j^{(e)}+k_0^2\mu^{(e)}N_i^{(e)}N_j^{(e)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$\mathrm{B}_{ij}^{(s_0)}=-\frac{1}{\varepsilon^{(s_0)}}\left[\left(ik_0+1/2r_0\right)\oint_{\Gamma_{S_0}}N_i^{(s_0)}N_j^{(s_0)}\,\mathrm{d}l\right],\ i=1,2,3;\ j=1,2,3, \tag{5.113}$$
$$b_i^{(e)}=k_0^2\left[\frac{1}{\varepsilon^{(e)}}-\mu^{(e)}\right]\int_{\Omega_e}N_i^{(e)}\mathrm{H}_z^{\text{пад}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{ik_0}{Z_0}\oint_{\Gamma_{S_\sigma}}N_i^{(e)}\mathrm{E}_\tau^{\text{пад}}\mathrm{d}l,\ i=1,2,3.$$

Заметим, что возбуждающая колонка состоит из двух компонент: одна от возбуждающей функции $f^{(e)}$ и другая от граничных условий на проводящей поверхности (контуре) S_σ. Процедура объединение в урав-

нении (5.112) двумерных элементов разбиения области решения аналогична рассмотренной в п.п. 5.4.2.

5.6. Решение трехмерных векторных задач методом конечных элементов

В течение многих лет МКЭ применялся для моделирования СВЧ-элементов, возбуждения антенн и решения задач рассеяния на сложных телах в упрощенной двумерной постановке. Это было обусловлено двумя причинами: во-первых, трудностью учета граничных условий при аппроксимации векторных задач традиционными *скалярными узловыми функциями элемента*, используемыми ранее в п.п. 5.4, 5.5; во-вторых, необходимостью ограничивать область решения для указанных задач. Впервые полноволновое трехмерное моделирование антенн было реализовано только в 1990 г., благодаря введению *векторных краевых функций элемента,* позволяющих аккуратно учитывать граничные условия, например на металлических объектах.

5.6.1. Волновые уравнения

Обратимся к системе (1.15), опустим знак ~ над комплексными диэлектрической и магнитной проницаемостями, подразумевая, что они характеризуют потери:

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}^{\text{ст}}+i\omega\tilde{\varepsilon}_a\mathbf{E},\quad \nabla\times\mathbf{E}=-\mathbf{M}^{\text{ст}}-i\omega\tilde{\mu}_a\mathbf{H},$$
$$\nabla\cdot\left(\tilde{\mu}_a\mathbf{H}\right)=-\left(\nabla\cdot\mathbf{M}^{\text{ст}}\right)\Big/i\omega,\quad \nabla\cdot\left(\tilde{\varepsilon}_a\mathbf{E}\right)=-\left(\nabla\cdot\mathbf{J}^{\text{ст}}\right)\Big/i\omega. \tag{5.114}$$

Используем стандартную процедуру [12, 34, 35]. Взяв ротор от обеих частей первого (второго) уравнения (5.114) и используя второе (первое) уравнение, записываем волновые уравнения для векторов поля, полагая, что среда неоднородная

$$\nabla\times\left\{\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu}\right\}-k_0^2\varepsilon\mathbf{E}=-ik_0Z_0\mathbf{J}^{\text{cm}}-\nabla\times\left\{\frac{\mathbf{M}^{\text{cm}}}{\mu}\right\},$$
$$\nabla\times\left\{\frac{\nabla\times\mathbf{H}}{\varepsilon}\right\}-k_0^2\mu\mathbf{H}=-ik_0Y_0\mathbf{M}^{\text{cm}}-\nabla\times\left\{\frac{\mathbf{J}^{\text{cm}}}{\varepsilon}\right\}, \tag{5.115}$$

где $Z_0=1/Y_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ – характеристическое сопротивление и $k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ – волновое число свободного пространства; в материальной среде $Z=1/Y=\sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}$ и $k=\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$; $\mathbf{J}^{\text{ст}}$ – вектор плотности стороннего электрического тока; $\mathbf{M}^{\text{ст}}$ – вектор плотности стороннего магнитного тока.

Используя векторное тождество $\nabla\times(\Psi\mathbf{A})=\nabla\Psi\times\mathbf{A}+\Psi\nabla\times\mathbf{A}$, можно записать (5.115) в более удобной форме:

$$\left(\frac{1}{\mu}\right)\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}-k_0^2\varepsilon\mathbf{E}+\left[\nabla\left(\frac{1}{\mu}\right)\times\nabla\times\mathbf{E}\right]=-ik_0Z_0\mathbf{J}^{\text{ст}}-\nabla\times\left\{\frac{\mathbf{M}^{\text{ст}}}{\mu}\right\} \tag{5.116}$$

– для электрического поля и

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\nabla\times\nabla\times\mathbf{H}-k_0^2\mu\mathbf{H}+\left[\nabla\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\times\nabla\times\mathbf{H}\right]=-ik_0Y_0\mathbf{M}^{\text{ст}}-\nabla\times\left\{\frac{\mathbf{J}^{\text{ст}}}{\varepsilon}\right\} \tag{5.117}$$

– для магнитного поля.

Удобство этой формы волновых уравнений заключается в том, что для однородной среды слагаемое в квадратных скобках обращается в ноль. В большинстве применений МКЭ предполагается, что в каждом конечном элементе среда однородная и следовательно, эти слагаемые равны нулю. Поэтому для однородной среды, например (5.116), учитывая векторное тождество $\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-\nabla^2\mathbf{E}$, имеет вид

$$-\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)+\nabla^2\mathbf{E}+k_0^2\varepsilon\mu\mathbf{E}=ik_0Z_0\mu\mathbf{J}^{\text{ст}}+\nabla\times\mathbf{M}^{\text{ст}}, \tag{5.118}$$

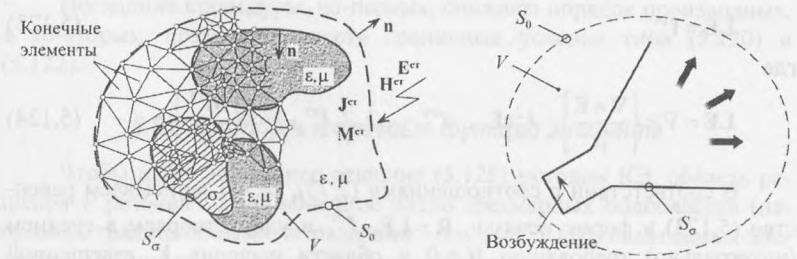
а для области, свободной от источников, принимает вид однородного уравнения Гельмгольца (1.45):

$$\nabla^2\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=0. \tag{5.119}$$

Помимо решения уравнений (5.116)–(5.118) необходимо удовлетворить граничным условиям:

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}=0, \tag{5.120}$$

на металлических поверхностях, например S_σ на рис. 5.13,*а,б*.



а) *б)*

Рис. 5.13. Область электродинамического анализа:
а – неоднородная; *б* – антенная

Помимо уравнений (5.115) электрическое и магнитное поля должны удовлетворять условию излучения на бесконечности (*условию излучения* Зоммерфельда), описывающему волны, уходящие на бесконечность (1.22):

$$\lim_{r\to\infty} r\left[\nabla\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}}\right)\right]+ik_0\mathbf{r}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}}\right)=0. \qquad (5.121)$$

Известно, что задача (5.114), (5.120), (5.121) может быть решена для очень ограниченного класса проводящих тел. Для использования МКЭ необходимо ограничить область решения электродинамических задач (антенных, рассеяния) некоторой воображаемой поверхностью, например S_0 на рис. 5.13,*а,б*, которая должна быть прозрачной для излучаемого (рассеянного) поля. Иными словами, граничные условия на S_0 должны быть такими, чтобы излучаемое (рассеянное) поле без искажения и отражений распространялось на границе. К сожалению, на практике это невозможно. Поэтому используют приближенные граничные условия (см. гл. 4), например

$$\mathbf{n}\times\nabla\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}}\right)+ik_0\mathbf{n}\times\mathbf{n}\times\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}}\right)\approx 0 \text{ на } S_0, \qquad (5.122)$$

что схоже с условием излучения Зоммерфельда и носит название *поглощающих граничных условий* АВС. При этом поверхность S_0 должна располагаться на некотором расстоянии от антенны (рассеивателя).

5.6.2. Трехмерный векторный метод конечных элементов с алгоритмом взвешенной невязки

Выберем в качестве исходного для решения уравнение для электрического поля (5.115), записав его в виде

$$\mathbf{LE}=\mathbf{f}^{\text{ст}}, \qquad (5.123)$$

где

$$\mathbf{LE}=\nabla\times\left\{\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{\mu}\right\}-k_0^2\varepsilon\mathbf{E},\quad \mathbf{f}^{\text{ст}}=-ik_0Z_0\mathbf{J}^{\text{ст}}-\nabla\times\left\{\frac{\mathbf{M}^{\text{ст}}}{\mu}\right\}. \qquad (5.124)$$

В соответствии с соотношениями (2.73), (2.74) записываем равенство (5.123) в форме невязки $\mathbf{R}=\mathbf{LE}-\mathbf{f}^{\text{ст}}$ и удовлетворяем в среднем (интегрально) требованию $\mathbf{R}=0$ в области решения V, взвешенной функциями $\mathbf{T}$, невязки. В результате получаем так называемую слабую форму волнового уравнения, поскольку оно удовлетворяет уравнению (5.123) в области решения в среднем (интегрально):

$$\int_V\mathbf{T}\cdot\left[\nabla\times\frac{1}{\mu}(\nabla\times\mathbf{E})-k_0^2\varepsilon\mathbf{E}\right]dV=$$
$$=-\int_V\mathbf{T}\cdot\left[ik_0Z_0\mathbf{J}^{\text{ст}}+\nabla\times\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{M}^{\text{ст}}\right)\right]\mathrm{d}V. \qquad (5.125)$$

Используя векторное тождество $\mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A}-\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, можно привести первое слагаемое в левой части к виду

$$\mathbf{T}\cdot\left[\nabla\times\frac{1}{\mu}(\nabla\times\mathbf{E})\right]=\frac{1}{\mu}(\nabla\times\mathbf{T})\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-\nabla\cdot\left[\mathbf{T}\times\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{E}\right)\right], \qquad (5.126)$$

а используя теорему о дивергенции $\int_V\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\mathrm{d}V=\oint_{S_0}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}s$, можно записать

$$\int_V\nabla\cdot\left[\mathbf{T}\times\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{E}\right)\right]\mathrm{d}V=\oint_{S_0}\left[\mathbf{T}\times\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{E}\right)\right]\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}s. \qquad (5.127)$$

И окончательно с учетом равенства (5.122) и векторного тождества $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ формула (5.125) приводится к следующему виду:

$$\int_V\left[\frac{1}{\mu}(\nabla\times\mathbf{T})\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-k_0^2\varepsilon\mathbf{T}\cdot\mathbf{E}\right]\mathrm{d}V=\int_{S_\sigma}\frac{1}{\mu}(\mathbf{n}\times\mathbf{T})\cdot(\nabla\times\mathbf{E})\mathrm{d}s-$$
$$-ik_0\int_{S_0}(\mathbf{n}\times\mathbf{T})\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{E})\mathrm{d}s-\int_V\mathbf{T}\cdot\left[ik_0Z_0\mathbf{J}^{\text{ст}}+\nabla\times\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{M}^{\text{ст}}\right)\right]\mathrm{d}V. \qquad (5.128)$$

Последние процедуры, во-первых, снижают порядок производных, а во-вторых, позволяют внести граничные условия типа (5.120) и (5.122).

5.6.3. Векторные краевые функции элемента

Чтобы найти численное решение (5.128) методом КЭ, область решения V разбивается на конечное число трехмерных подобластей (например, традиционными тетраэдрами – см. рис. 5.1,*а*), называемых элементами. Эти элементы имеют общие узловые точки и в совокупности аппроксимируют форму области. Непрерывная векторная величина $\mathbf{E}$ аппроксимируется на каждом элементе полиномом (функцией элемента), который определяется с помощью узловых значений этой величины.

Как уже отмечалось, при аппроксимации решений трехмерных векторных задач традиционными скалярными узловыми функциями элемента возникают серьезные осложнения. Во-первых, достаточно сложно накладывать условия на границе раздела сред в области решения, на проводящих и диэлектрических ребрах, а также угловых областях, где проявляются сингулярные особенности поля. Во-вторых, при аппроксимации полей традиционными узловыми функциями элемента накладывалось условие непрерывности полей, но не их производных, что приводит к появлению решений, не отвечающих физическому смыслу задачи. Эти решения называются ложными в том смысле, что они не удовлетворяют условиям дивергенции в выражениях (5.114): $\nabla\cdot(\mu_a\mathbf{H})=0$ для магнитного поля и $\nabla\cdot(\varepsilon_a\mathbf{E})=-(\nabla\cdot\mathbf{J}^{\text{ст}})/i\omega$ для электрического поля (последнее превращается в $\nabla\cdot(\varepsilon_a\mathbf{E})=0$ для областей, свободных от источников). Появление ложных решений пытаются устранить различными способами [34, 35]: аппроксимацией полей традиционными узловыми функциями элемента с наложением условий непрерывности на поля и их производные; применением первого или второго уравнений в записи (5.114) после получения для **H** (соответственно для **E**) решения с ложными значениями; введением в слабую форму волнового уравнения или функционал специально сконструированных штрафных функций. Все это существенно усложняет процедуру получения решения. Но трудности снимаются благодаря введению *векторных краевых функций элемента* (H. Whitney. Geometric Integration Theory. – Princeton Univ. Press, NJ, 1957).

Векторные краевые функции двумерного прямоугольного элемента. Определим векторные краевые функции на примере двумерного прямоугольного элемента (рис. 5.14), на которые разбита вся область решения. На рисунке $l_y^{(e)}$, $l_x^{(e)}$ – размеры элемента, $x_c^{(e)}$, $y_c^{(e)}$ – координаты центра элемента. На каждой стороне (ребре, крае) задается касательная компонента, например электрического поля, так что поле внутри элемента может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_x^{(e)}&=\frac{1}{l_y^{(e)}}\left(y_c^{(e)}+\frac{l_y^{(e)}}{2}-y\right)\mathrm{E}_{x1}^{(e)}+\frac{1}{l_y^{(e)}}\left(y-y_c^{(e)}+\frac{l_y^{(e)}}{2}\right)\mathrm{E}_{x2}^{(e)},\\ \mathrm{E}_y^{(e)}&=\frac{1}{l_x^{(e)}}\left(x_c^{(e)}+\frac{l_x^{(e)}}{2}-x\right)\mathrm{E}_{y1}^{(e)}+\frac{1}{l_x^{(e)}}\left(x-x_c^{(e)}+\frac{l_x^{(e)}}{2}\right)\mathrm{E}_{y2}^{(e)}.\end{aligned}\qquad(5.129)$$

Из этих выражений видно, что $\mathrm{E}_{x1}^{(e)}$ представляет компоненту поля E_x вдоль ребра (1,2), а $\mathrm{E}_{x2}^{(e)}$ ассоциируется с компонентой поля E_x

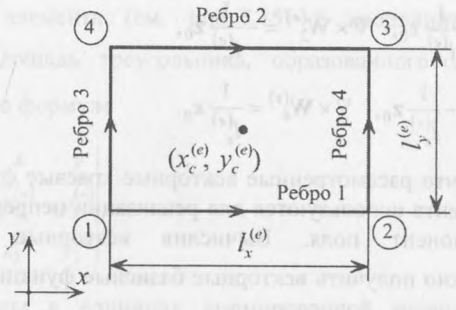


Рис. 5.14. Прямоугольный элемент

вдоль ребра (4, 3). Аналогичная идентификация может быть сделана для $\mathrm{E}_{y1}^{(e)}$ и $\mathrm{E}_{y2}^{(e)}$. Обозначим далее ребро (1, 2) как 1, ребро (4, 3) – 2, ребро (1, 4) – 3, а ребро (2, 3) – 4. Соответственно формулы (5.129) можно записать в виде

$$\mathbf{E}^{(e)}=\sum\nolimits_{j=1}^{4}\mathbf{W}_j^{(e)}\mathrm{E}_j^{(e)},\qquad(5.130)$$

где $\mathrm{E}_j^{(e)}$ – касательная компонента электрического поля вдоль j-го ребра элемента, а $\mathbf{W}_j^{(e)}$ – векторная интерполяционная базисная функция элемента, определенная в соответствии с выражениями (5.129):

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_1^{(e)}&=\frac{1}{l_y^{(e)}}\left(y_c^{(e)}+\frac{l_y^{(e)}}{2}-y\right)\mathbf{x}_0,\quad \mathbf{W}_2^{(e)}=\frac{1}{l_y^{(e)}}\left(y-y_c^{(e)}+\frac{l_y^{(e)}}{2}\right)\mathbf{x}_0,\\ \mathbf{W}_3^{(e)}&=\frac{1}{l_x^{(e)}}\left(x_c^{(e)}+\frac{l_x^{(e)}}{2}-x\right)\mathbf{y}_0,\quad \mathbf{W}_4^{(e)}=\frac{1}{l_x^{(e)}}\left(x-x_c^{(e)}+\frac{l_x^{(e)}}{2}\right)\mathbf{y}_0.\end{aligned}\qquad(5.131)$$

Важным свойством базисных функций (5.131) является то, что $\mathbf{W}_j^{(e)}$ имеет тангенциальную компоненту только вдоль j-го ребра элемента и нулевую вдоль остальных ребер, поэтому выполнение условий непрерывности касательных компонент поля на ребрах элемента гарантировано. Эти функции обладают другим уникальным свойством: $\nabla\cdot\mathbf{W}_j^{(e)}=0$ внутри элемента. Поэтому они идеально представляют векторные поля в области, свободной от источников. Далее, взяв ротор от функций (5.131), получаем, что правые части – не нулевые константы

$$\nabla\times\mathbf{W}_1^{(e)}=\frac{1}{l_y^{(e)}}\mathbf{z}_0,\quad \nabla\times\mathbf{W}_2^{(e)}=-\frac{1}{l_y^{(e)}}\mathbf{z}_0,$$
$$\nabla\times\mathbf{W}_3^{(e)}=-\frac{1}{l_x^{(e)}}\mathbf{z}_0,\quad \nabla\times\mathbf{W}_4^{(e)}=\frac{1}{l_x^{(e)}}\mathbf{z}_0. \qquad (5.132)$$

Отметим, что рассмотренные векторные краевые функции прямоугольного элемента используются для реализации непрерывности касательных компонент поля. Вычислив векторные произведения $(\mathbf{z}_0\times\mathbf{W}_1^{(e)})$, можно получить векторные базисные функции, которые гарантируют непрерывность нормальных компонент. В отличие от $\mathbf{W}_1^{(e)}$ функции $(\mathbf{z}_0\times\mathbf{W}_1^{(e)})$ имеют нулевой ротор и отличную от нуля дивергенцию. Они представляют удобную аппроксимацию для поверхностных токов (см. п. 1.3.3). В частности, базисные функции «плоская крыша» (rooftop function) широко используются при решении интегральных уравнений с помощью ММ.

Векторные краевые функции двумерного треугольного элемента. Для областей сложной геометрии векторные краевые функции прямоугольного элемента (а для трехмерных задач параллелепипеда) неудобны. Рассмотрим для двумерного случая векторные краевые функции треугольного элемента (рис. 5.15). Поскольку ребра треугольного элемента не параллельны x- и y-осям, введение таких функций – задача более сложная.

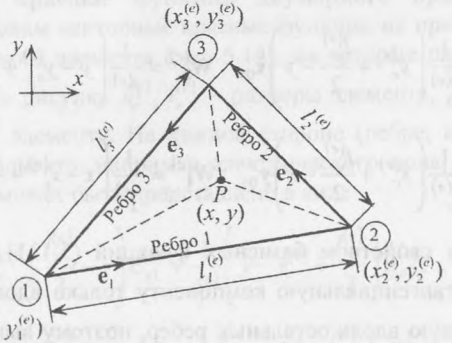


Рис. 5.15. Треугольный элемент

Векторные краевые функции треугольного элемента удобно определить, используя так называемые координаты в единицах нормированной площади (area coordinates). Пусть точка $P(x,y)$ находится внутри

треугольного элемента (см. рис. 5.15) с координатами i-го узла $\left(x_i^{(e)}, y_i^{(e)}\right)$. Площадь треугольника, образованного точками P, 2, 3, можно найти по формуле

$$\Delta_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_2^{(e)} & y_2^{(e)}\\ 1 & x_3^{(e)} & y_3^{(e)}\end{vmatrix}. \qquad (5.133)$$

Координаты в единицах нормированной площади (симплекс-координаты) $L_1^{(e)}$ определены как

$$L_1^{(e)}=\frac{\Delta_1}{\Delta^e}=\frac{S_{P23}}{S_{123}}, \qquad (5.134)$$

где Δ^e – полная площадь треугольника 1–2–3, которую можно найти из формулы (5.133) заменой x, y на $x_1^{(e)}, y_1^{(e)}$. Аналогичным образом определяются две остальные симплекс-координаты:

$$L_2^{(e)}=\frac{\Delta_2}{\Delta^e}=\frac{S_{P31}}{S_{123}};\qquad L_3^{(e)}=\frac{\Delta_1}{\Delta^e}=\frac{S_{P12}}{S_{123}}. \qquad (5.135)$$

Соответственно координаты x и y внутри треугольника можно записать в виде

$$x=\sum\nolimits_{i=1}^{3}L_i^{(e)}x_i^{(e)},\quad y=\sum\nolimits_{i=1}^{3}L_i^{(e)}y_i^{(e)},\quad 1=\sum\nolimits_{i=1}^{3}L_i^{(e)}, \qquad (5.136)$$

где последнее равенство является следствием тождества $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3=\Delta^e$. Соответственно $L_1^{(e)}$, $L_2^{(e)}$ и $L_3^{(e)}$, как функции, могут быть выражены в терминах x, y и координат вершин треугольного элемента при решении системы (5.136). Координата $L_1^{(e)}$ равна нулю на стороне 2–3, противоположной вершине 1, и равна 1 в вершине 1. Изменение этой координаты вдоль высоты треугольного (e)-элемента показано на рис. 5.16. Для двух оставшихся симплекс координат поведение схожее: равное нулю на стороне противоположной вершине и равное 1 в вершине. Рассмотренные особенности функций $L_i^{(e)}$ делают их удобными для использования в качестве базисных функций $N_i^{(e)}=L_i^{(e)}$ при линейной аппроксимации.

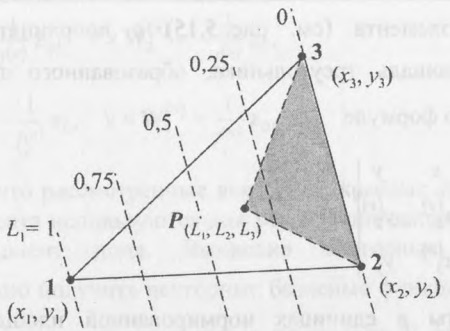


Рис. 5.16. Координаты в единицах нормированной площади (симплекс-координаты)

Обращаемся вновь к треугольному элементу на рис. 5.15, где показана нумерация локальных узлов и ребер. Векторные базисные функции треугольного элемента в координатных функциях $L_1^{(e)}$, $L_2^{(e)}$ и $L_3^{(e)}$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{W}_k^{(e)} = \mathbf{N}_{ij}^{(e)} = l_{ij}(L_i^{(e)} \nabla L_j^{(e)} - L_j^{(e)} \nabla L_i^{(e)}), \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{5.137}$$

где $\mathbf{W}_k^{(e)}$ означает базисную функцию k-го ребра (e)-элемента и $l_{ij} = l_k$ – длина ребра, сформированного узлами i, j треугольного элемента (см. рис. 5.15). Это приводит к трем векторным базисным функциям треугольного элемента

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_1^{(e)} &= \mathbf{N}_{12}^{(e)} = l_1(L_1^{(e)} \nabla L_2^{(e)} - L_2^{(e)} \nabla L_1^{(e)}), \\
\mathbf{W}_2^{(e)} &= \mathbf{N}_{23}^{(e)} = l_2(L_2^{(e)} \nabla L_3^{(e)} - L_3^{(e)} \nabla L_2^{(e)}), \\
\mathbf{W}_3^{(e)} &= \mathbf{N}_{31}^{(e)} = l_3(L_3^{(e)} \nabla L_1^{(e)} - L_1^{(e)} \nabla L_3^{(e)}).
\end{aligned} \tag{5.138}$$

Векторное поле внутри треугольного элемента можно представить как

$$\mathbf{E}^{(e)} = \sum_{k=1}^{3} E_k^{(e)} \mathbf{W}_k^{(e)}, \tag{5.139}$$

где $E_k^{(e)}$ – значение тангенциального поля вдоль k-ребра (e)-элемента. Можно показать, что функции (5.138) обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{W}_k^{(e)} &= \nabla \cdot \mathbf{N}_{ij}^{(e)} = 0, \\
\nabla \times \mathbf{W}_k^{(e)} &= \nabla \times \mathbf{N}_{ij}^{(e)} = 2 l_{ij} \nabla L_I^{(e)} \times \nabla L_j^{(e)}.
\end{aligned} \tag{5.140}$$

Обозначим через $\mathbf{e}_1$ единичный вектор, направленный от узла 1 к узлу 2, как показано на рис. 5.16, и составим скалярные произведения $\mathbf{e}_1 \cdot \nabla L_1^{(e)} = -1/l_1$ и $\mathbf{e}_1 \cdot \nabla L_2^{(e)} = 1/l_1$. Поскольку $L_1^{(e)}$ – линейная функция, меняющаяся от единицы в узле 1 до нуля в узле 2, а $L_2^{(e)}$ равна единице в узле 2 и нулю в узле 1, то $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{N}_{12}^{(e)} = L_1^{(e)} + L_2^{(e)} = 1$ вдоль всего ребра 1. Это означает, что $\mathbf{N}_{12}^{(e)}$ имеет постоянную касательную составляющую вдоль ребра 1 (см. рис. 5.15). Более того, симплекс-координата $L_1^{(e)}$ исчезает вдоль ребра 2, а $\nabla L_1^{(e)}$ перпендикулярна ребру 2; соответственно $L_2^{(e)}$ исчезает вдоль ребра 3, а $\nabla L_2^{(e)}$ перпендикулярна ребру 3. Поэтому $\mathbf{N}_{12}^{(e)}$ не имеет тангенциальных компонент вдоль этих ребер. Аналогичное рассмотрение можно провести для $\mathbf{N}_{23}^{(e)}$ и $\mathbf{N}_{31}^{(e)}$. Таким образом, можно обеспечить выполнение условий непрерывности касательных компонент поля на ребрах элемента, не накладывая условия на нормальные компоненты. На рис. 5.17 показаны векторные базисные функции треугольного элемента (5.138). Отметим, что если ввести цилинд-

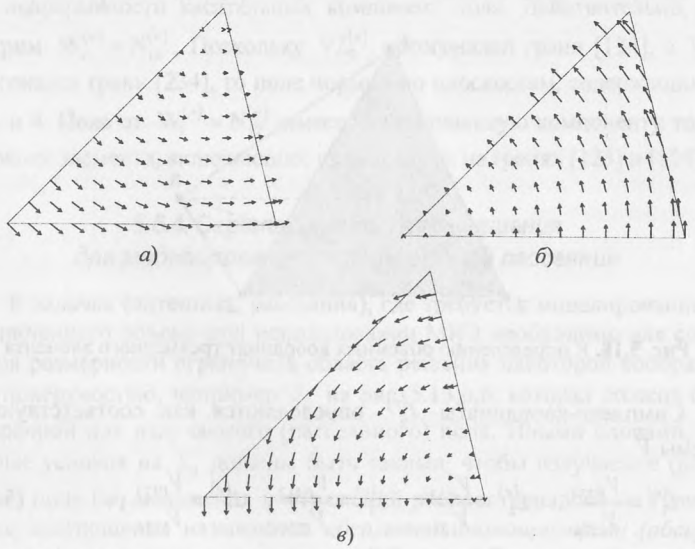


Рис. 5.17. Векторные базисные функции треугольного элемента:
$а$ – $\mathbf{W}_1^{(e)} = \mathbf{N}_{12}^{(e)}$; $б$ – $\mathbf{W}_2^{(e)} = \mathbf{N}_{23}^{(e)}$; $в$ – $\mathbf{W}_3^{(e)} = \mathbf{N}_{31}^{(e)}$

рическую систему координат (ρ,φ) с началом в узле 3 и отсчитывать угловую координату от узла 1 к 2, то можно получить удобную для графического построения формулу

$$\mathbf{W}_1^{(e)} = \mathbf{N}_{12}^{(e)} = \frac{\rho}{h_3^{(3)}}\varphi_0, \qquad (5.141)$$

где $h_3^{(3)}$ – высота, опущенная из узла 3 на ребро 1; φ_0 – единичный орт цилиндрической системы координат. Размер стрелки соответствует значению поля в данной точке. Аналогичное представление можно получить для других двух функций, а также представление векторных базисных функций, которые гарантируют непрерывность нормальных компонент.

Векторные краевые функции трехмерного элемента. Используя МКЭ, область решения V разбиваем на элементы (рис. 5.18), например наиболее популярные тетраэдры (см. рис. 5.1,*а*). Рассмотрим для трехмерного случая векторные краевые функции тетраэдра. Для этого аналогично двумерному случаю удобно их определить, если ввести так называемые «объемные координаты» (volume coordinates) или симплекс-координаты. Пусть точка $P(x,y,z)$ находится внутри тетраэдра (см. рис. 5.18) с координатами i-го узла $\left(x_i^{(e)}, y_i^{(e)}, z_i^{(e)}\right)$.

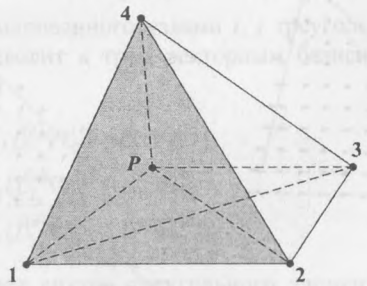


Рис. 5.18. К определению объемных координат трехмерного элемента

Симплекс-координаты $L_i^{(e)}$ определяются как соответствующие объемы V

$$L_1^{(e)} = \frac{V_{P234}}{V_{1234}}, \quad L_2^{(e)} = \frac{V_{P341}}{V_{1234}}, \quad L_1^{(e)} = \frac{V_{P412}}{V_{1234}}, \quad L_1^{(e)} = \frac{V_{P123}}{V_{1234}}, \qquad (5.142)$$

так, что координаты точки (x,y,z) внутри тетраэдра можно выразить через координаты узлов

$$x = \sum_{i=1}^{4} L_i^{(e)} x_i^{(e)}, \quad y = \sum_{i=1}^{4} L_i^{(e)} y_i^{(e)}, \quad z = \sum_{i=1}^{4} L_i^{(e)} z_i^{(e)}. \qquad (5.143)$$

Как и для двухмерного случая (треугольного элемента) базисные узловые функции элемента равны объемным координатам, т.е. $N_i^{(e)} = L_i^{(e)}$, $i = 1,\ldots,4$. Векторные краевые функции элемента, моделирующие векторную природу электрического поля, в соответствии с обозначениями рис. 5.18 вводятся аналогично (5.137)

$$\mathbf{W}_k^{(e)} = \mathbf{N}_{ij}^{(e)} = l_{ij}(L_i^{(e)}\nabla L_j^{(e)} - L_j^{(e)}\nabla L_i^{(e)}), \quad i,j = 1,\ldots,4, \qquad (5.144)$$

где $\mathbf{W}_k^{(e)}$ – базисная функция k-го ребра (e)-элемента, обладающая свойствами (5.140), и $l_{ij} = l_k$ – длина ребра, сформированного узлами i, j тетраэдра.

Векторное поле внутри тетраэдра может быть представлено в виде

$$\mathbf{E}^{(e)}(x,y,z) = \sum_{k=1}^{6} E_k^{(e)} \mathbf{W}_k^{(e)}(x,y,z), \qquad (5.145)$$

где $E_k^{(e)}$ – значение тангенциального поля вдоль k-ребра (e)-элемента.

Векторные краевые функции тетраэдра используются для реализации непрерывности касательных компонент поля. Действительно, рассмотрим $\mathbf{W}_1^{(e)} = \mathbf{N}_{12}^{(e)}$. Поскольку $\nabla L_2^{(e)}$ ортогонален грани [134], а $\nabla L_1^{(e)}$ ортогонален грани [234], то поле нормально плоскостям, содержащим узлы 3 и 4. Поле от $\mathbf{W}_1^{(e)} = \mathbf{N}_{12}^{(e)}$ имеет тангенциальную компоненту только на гранях элемента, включающих узлы 1, 2, т.е. на гранях [123] и [124].

5.6.4. Ограничение области решения для моделирования антенн и полей рассеяния

В задачах (антенных, рассеяния), где требуется моделирование неограниченного объема при использовании МКЭ необходимо для сокращения размерности ограничить область решения некоторой воображаемой поверхностью, например S_0 на рис. 5.13,*а*,*б*, которая должна быть прозрачной для излучаемого (рассеянного) поля. Иными словами, граничные условия на S_0 должны быть такими, чтобы излучаемое (рассеянное) поле без искажения и отражений распространялось на границе. Такие соотношения называются *абсолютно поглощающими (абсорбирующими) граничными условиями* АВС, подробно они обсуждены в гл. 4. Различают два типа АВС: *аналитические*, сформулированные в виде математических соотношений (аналогичных условию излучения

Зоммерфельда) и *материальных*, использующих слои с комплексными электрофизическими параметрами.

Аналитические граничные условия. Представляют фактически математическую формулировку связи между касательными компонентами электрического и магнитного поля на границе, при которой поверхностный импеданс равен импедансу свободного пространства. Тогда поверхность при нормальном падении плоской волны становится прозрачной. Это условие используют для искусственной ограничивающей поверхности, например S_0 на рис. 5.13,*а*,*б*. Заметим, что данное условие идентично условию излучения Зоммерфельда (1.22), (5.121), а пример таких условий для трехмерного случая записан формулой (5.122). Основным недостатком аналитических граничных условий является то, что излучаемое поле на ограничивающей поверхности S_0 представляет сумму плоских волн, распространяющихся под разными углами. При этом для волн, падающих под большими углами, наблюдаются существенные отражения, поэтому поверхность S_0 должна располагаться не менее чем на половину длины волны от антенны (рассеивателя). Достоинство – простота, удобство учета внешних граничных условий при формулировке электродинамической задачи и сохранение высокой разреженности основной матрицы.

Материальные граничные условия (*полностью согласующий слой – ПСС*). Основаны на том, что поглощение обратной (отраженной от ограничивающей поверхности S_0) волны обеспечивается за счет заполнения части пространства материалом с потерями (материальные поглощающие граничные условия). Нечто подобное используется при проектировании безэховых измерительных камер, однако для целей моделирования можно брать искусственные (отсутствующие в природе) поглощающие слои.

Конечноэлементный – граничный интегральный метод (*finite element – boundary integral method – FE–BI*). Гибридный подход, объединяющий достоинства МКЭ и интегральных уравнений, применяется при моделировании с отрытыми границами. Основная идея сводится к следующему: область решения разбивается виртуальной границей на внутреннюю, содержащую объект моделирования, и внешнюю (открытую). Во внутренней области задача решается с помощью МКЭ, а на внешней формулируется как интегральное уравнение, в котором ограничение на открытой границе учтено в функции Грина. На виртуальной границе полученные решения сшиваются, исходя из условий непрерывности.

5.6.5. Решение слабой формы волнового уравнения (5.128)

Перейдем к численному решению уравнения (5.128). Используя МКЭ, область решения V разбиваем на элементы (см. рис. 5.13), например наиболее популярные тетраэдры (рис. 5.1,*а*), в каждом из которых аппроксимируем решение векторными краевыми функциями элемента в виде формулы (5.145). После этого полное поле $\mathbf{E}$ в объеме можно представить как

$$\mathbf{E}=\sum_{n=1}^{N_p} E_n \mathbf{W}_n , \tag{5.146}$$

где N_p – полное число ребер в V, исключая ребра на проводящих поверхностях; E_n – значение касательной компоненты электрического поля на n-м ребре; $\mathbf{W}_n$ – векторная краевая функция n-го ребра. Заметим, что при объединении элементов внутри области решения функция $\mathbf{W}_n$ охватывает несколько соседних элементов, разделенных общим ребром. Кроме того, при исключении в формуле (5.146) ребер на проводящих поверхностях аппроксимирующее поле должно удовлетворять граничным условиям (5.120). Подставляя соотношение (5.146) в (5.128) и выбрав в качестве пробных функций $\mathbf{T}$ те же функции $\mathbf{W}_n$, получаем

$$\sum_{n=1}^{N_p} K_{kn} E_n = b_k, \quad k=1,2,\ldots,N_p , \tag{5.147}$$

где

$$K_{kn}=\int_V \left[\frac{1}{\mu}(\nabla\times\mathbf{W}_k)\cdot(\nabla\times\mathbf{W}_n)-k_0^2\varepsilon\mathbf{W}_k\cdot\mathbf{W}_n\right]\mathrm{d}V + \\ +ik_0\int_{S_0}(\mathbf{n}\times\mathbf{W}_k)\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{W}_n)\,\mathrm{d}s, \tag{5.148}$$

$$b_k=-\int_V \mathbf{W}_k\cdot\left[ik_0 Z_0\mathbf{J}^{\text{ст}}+\nabla\times\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{M}^{\text{ст}}\right)\right]\mathrm{d}V. \tag{5.149}$$

Отметим, что интеграл по проводящей поверхности исчез, поскольку $\mathbf{n}\times\mathbf{W}_k=0$ на S_σ. Уравнение (5.147) можно записать в компактной форме

$$[\mathbf{K}]\mathbf{E}>=\mathbf{b}>, \tag{5.150}$$

которая решается относительно $\mathbf{E}>$. Поскольку связь между элементами в области решения по характеру локальная, матрица $[\mathbf{K}]$ сильно

разреженная и симметричная. После определения $\mathbf{E}>$ можно рассчитать поле в области V, используя формулу (5.146), зная которое можно рассчитать основные параметры антенны, такие как входной импеданс и диаграмму направленности.

5.6.6. Трехмерная векторная вариационная формулировка метода конечных элементов

Стационарный функционал, реализующий решение задачи (5.123), при условии, что оператор $\mathbf{L}(...)$ самосопряженный и положительно-определенный (для конкретного оператора эти свойства необходимо доказывать), имеет вид

$$F(\mathbf{E}) = 1/2(\mathbf{LE}, \mathbf{E}) - (\mathbf{f}^{\text{ст}}, \mathbf{E}). \tag{5.151}$$

При этом скалярное произведение векторных функций $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ понимается в смысле записи (2.1)

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_V \mathbf{a}\mathbf{b}^* \, dV, \tag{5.152}$$

где V – пространственная область задачи.

Доказательство стационарности функционала (5.151) для уравнений (5.116) и соответственно (5.117) можно найти в [34, 35]. Для электрического поля операторы имеют вид

$$\mathbf{LE} = \nabla \times \left\{ \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu} \right\} - k_0^2 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{f}^{\text{ст}} = -ik_0 Z_0 \mathbf{J}^{\text{ст}} - \nabla \times \left\{ \frac{\mathbf{M}^{\text{ст}}}{\mu} \right\}; \tag{5.153}$$

$$\mathbf{LE} = \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E}.$$

Они положительно определенные только при условии действительных значений ε и μ, а также однородных граничных условий (2.27). Запишем функционал (5.151) для полного электрического поля, полагая для определенности, что по-прежнему заданы граничные условия типа (5.120) и (5.122)

$$F(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \left[\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \varepsilon \mathbf{E} \right] dV + \tag{5.154}$$

$$+ \int_V \mathbf{E} \cdot \left[ik_0 Z_0 \mathbf{J}^{\text{ст}} + \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{M}^{\text{ст}} \right) \right] dV,$$

где V – полный объем вычислительной области (рис. 5.13). Действуя аналогично при выводе формулы (5.128) преобразуем функционал (5.154) к виду:

$$F(\mathbf{E}) = \int_V \left[\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right] dV =$$

$$= \int_{S_\sigma} \frac{1}{\mu} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \, ds - ik_0 \int_{S_0} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \, ds - \tag{5.155}$$

$$- \int_V \mathbf{E} \cdot \left[ik_0 Z_0 \mathbf{J}^{\text{ст}} + \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{M}^{\text{ст}} \right) \right] dV,$$

где S_0 – поверхность, ограничивающая область V, а S_σ – проводящая поверхность (см. рис. 5.13).

Далее используется стандартная процедура для нахождения экстремума (5.155) методом КЭ. Решение в соответствие с соотношениями (5.145), (5.146) ищется в виде

$$\mathbf{E} = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{k=1}^{6} E_k^{(e)} \mathbf{W}_k^{(e)}, \tag{5.156}$$

где N_e – число элементов в области решения, $E_k^{(e)}$ – значение тангенциального поля вдоль k-ребра (e)-элемента; $\mathbf{W}_k^{(e)}$ – векторные краевые функции элемента. Подставляя формулу (5.156) в (5.155), учитывая граничные условия (5.122), дифференцируя (5.155) по $E_k^{(e)} = \mathrm{E}_n$ и приравнивая результат к нулю, получаем уравнение, аналогичное (5.150) для нахождения $E_k^{(e)} = \mathrm{E}_n$.

5.7. Точность и численная дисперсия

Конечно-элементная дискретизация позволяет решать уравнения численно, однако вносит погрешности, связанные с дискретизации функции. Кроме того, аналогично МКР (п. 3.5), при решении задач распространения волн методом КЭ, возникает явление *численной дисперсии*, т.е. зависимости постоянной распространения от частоты, хотя среда распространения бездисперсионная. Чтобы выявить численную дисперсию для МКЭ, действуем аналогично п. 3.5: обращаемся к волновому уравнению (3.34) для плоской электромагнитной волны и дискретизируем (3.34), используя линейные функции формы (5.46). В результате определяем постоянную распространения β в дискретной среде:

$$\beta = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left(\frac{6 - 2(k_0 \Delta x)^2}{6 + (k_0 \Delta x)^2} \right), \tag{5.157}$$

которую сравним с истинным значением k_0. Видно, что численный коэффициент распространения β отличается от коэффициента распространения k_0 и зависит от шага Δx и $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ (длины волны λ_0). Фазовая ошибка Ф на единичную ячейку определяется, как и для МКР, формулой (3.40). В таблице в п.п. 3.4.2 для МКР приведена фазовая ошибка в градусах на длину волны Φ_{λ_0} в функции $\Delta x/\lambda_0$. Сопоставим эти значения для МКЭ. При шаге дискретизации $\Delta x/\lambda_0 = 1/5$ значение $\Phi_{\lambda_0} = 29,27°$ для МКР и $\Phi_{\lambda_0} = 20,10°$ для МКЭ; при шаге дискретизации $\Delta x/\lambda_0 = 1/20$ значение $\Phi_{\lambda_0} = 1,49°$ для МКР и $\Phi_{\lambda_0} = 1,46°$ для МКЭ. Некоторое улучшение точности решения для МКЭ объясняется использованием линейных базисных функций по сравнению с импульсными функциями для МКР.

5.8. Пакет программ для численного анализа СВЧ-устройств и антенн в частотной области методом конечных элементов

Пакет программ предназначен для расчета параметров и моделирования электромагнитных полей в сложных СВЧ-устройствах [36]. Программное обеспечение объединяет программу черчения трехмерных объектов, программу расчета (включающую в себя несколько методов решения граничных задач) и пост-процессор для обработки и детального анализа полученных результатов, в частности визуализацию результатов анализа, анимацию картин поля, построение трехмерных диаграмм направленности и т.д. (рис. 5.19).

Используя пакет, можно рассчитать:

– ближнее электромагнитное поле и поле в дальней зоне;

– характеристические импедансы порта и постоянные распространения в регулярных линиях передачи, подключенных к портам;

– одномодовые и многомодовые матрицы рассеяния устройств;

– собственные волны и собственные колебания различных волноведущих и резонансных структур.

Процесс проектирования с помощью пакета программ включает в себя ряд стандартных шагов.

1. Создание модели анализируемой структуры, в том числе:

– создание трехмерной графической модели структуры (чертежа);

– задание параметров материалов, из которых состоит структура.

2. Определение электродинамических параметров структуры, содержащее:

– задание граничных условий на поверхностях, формирующих анализируемый объект;

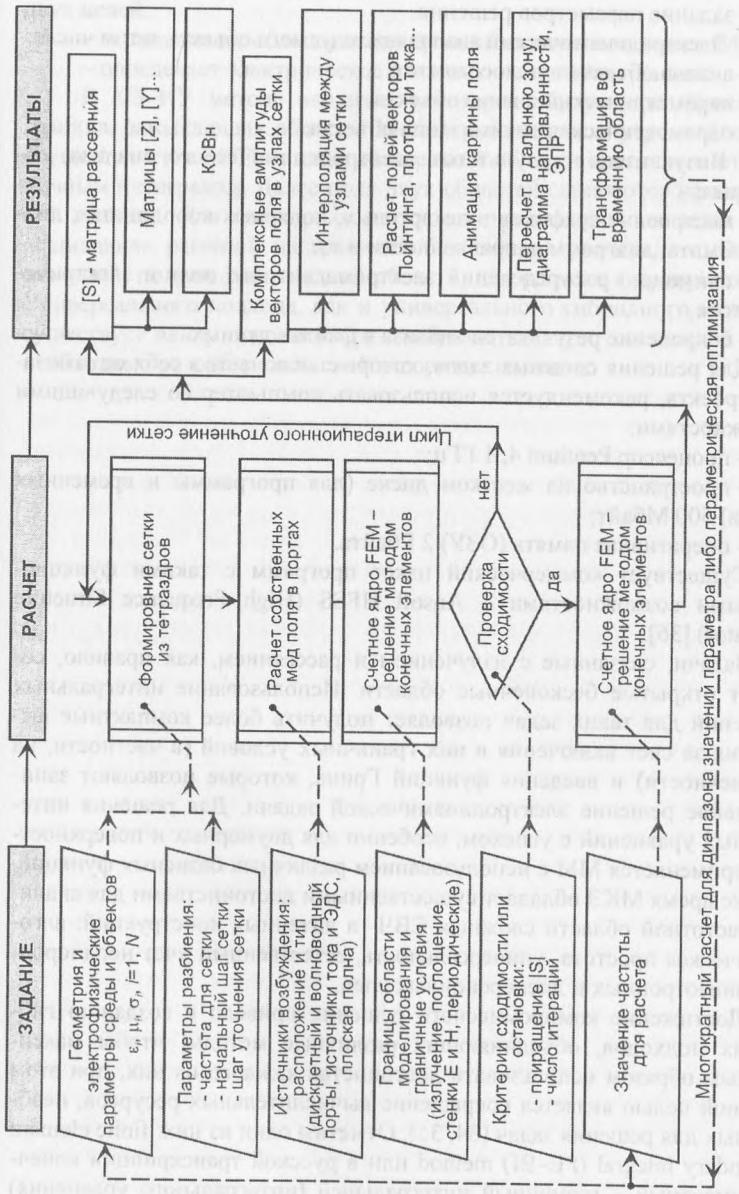


Рис. 5.19. Структура программ электродинамического моделирования методом конечных элементов

– определение и калибровка портов;
– задание параметров решения.

3. Электродинамический анализ исследуемого объекта, в том числе:
– анализ объекта в полосе частот;
– параметрический анализ объекта;
– параметрическая оптимизация объекта.

4. Визуализация результатов электродинамического анализа, содержащая:
– построение графиков в декартовых, полярных координатах, диаграмм Смита, диаграмм направленности и т.д.;
– анимацию распределений электромагнитного поля и электрического тока;
– сохранение результатов анализа в файлах данных.

Для решения сложных задач, которые включают в себя оптимизацию проекта, рекомендуется использовать компьютер со следующими возможностями:
– процессор Pentium 4, 1 ГГц;
– пространство на жестком диске (для программы и временных файлов) 500 Мбайт;
– оперативная память (ОЗУ) 2 Гбайта.

Существует коммерческий пакет программ с такими функциональными возможностями – Ansoft HFSS (High Frequence Structure Simulator) [36].

Задачи, связанные с излучением и рассеянием, как правило, содержат открытые бесконечные области. Использование интегральных уравнений для таких задач позволяет получить более компактные выражения за счет включения в них граничных условий (в частности, на бесконечности) и введения функций Грина, которые позволяют записать явное решение электродинамической задачи. Для решения интегральных уравнений с успехом, особенно для двумерных и поверхностных, применяется ММ с использованием различных базисных функций. В то же время МКЭ обладает существенными достоинствами для анализа в частотной области сложных СВЧ- и антенных конструкций: алгоритмическая простота, универсальность, естественный учет неоднородных, анизотропных и дисперсионных сред.

Достижение компромиссного решения привело к созданию гибридных подходов, объединяющих различные методы, чтобы максимальным образом использовать достоинства каждого из них, при этом основной целью является сокращение вычислительных ресурсов, необходимых для решения задач [34, 35]. Отметим один из них: finite element – boundary integral (FE–BI) method или в русской транскрипции конечно-элементный – граничный интегральный (интегрального уравнения) метод – КЭ–ИУ метод. Данный подход объединяет традиционный ММ

(см. гл. 2) и МКЭ, при этом интегральное уравнение используется для двух целей:
– ограничивает область моделирования с использованием МКЭ;
– определяет электрическое и магнитное поля на границе.

В КЭ–ИУ методе вводится некоторая виртуальная (фиктивная) граница, замыкающая области. Моделирование во внутренней области осуществляется МКЭ, а поля во внешней области представляются граничным интегралом. Далее поля двух областей сшиваются на виртуальной границе. Для гибридных методов нетривиальной является задача «сшивания» решений на границе областей для расчета, т.е. передача значений, полученных в одной области, для расчета в другую область. Универсального подхода, как и универсального гибридного метода, не существует ввиду огромного разнообразия задач, и для каждой задачи необходимо разрабатывать свой алгоритм сшивания.

— ГЛАВА 6 —

Интегральные представления и интегральные уравнения

В настоящее время существует достаточно обширный круг физических задач, для математического описания которых эффективно используются интегральные уравнения [4–6, 16, 20]. К ним, в частности, относятся краевые задачи о собственных волнах в полосковых и щелевых структурах, дифракции электромагнитных волн на металлических и диэлектрических телах, излучении антенн и антенных решеток и т.д. Вообще, при решении внешних задач получение интегральных уравнений наиболее распространено. Использование интегральных уравнений в электродинамических краевых задачах и задачах дифракции в отношении окончательно получаемых результатов эквивалентно дифференциальным уравнениям, однако их применение позволяет получить более компактные выражения за счет включения в них граничных условий и сокращения размерности задач. Но при этом требуется достаточно трудоемкая предварительная подготовка.

В начале главы вводятся понятие функций Грина. Это вспомогательные функции, которые позволяют в некоторых простых ситуациях (однородное пространство, плоскослоистая среда) записать явное решение электродинамической задачи. Однако их главная ценность в том, что с их помощью многие задачи рассеяния и возбуждения электромагнитных волн, сначала формулируемые в терминах дифференциальных уравнений, удается свести к интегральным уравнениям, в которых условия для открытых областей, условия излучения уже учтены при выборе функции Грина. При этом используются различные интегральные представления и преобразования: скалярные формулы Грина и их векторные аналоги (формулы Стреттона–Чу), представления полей через эквивалентные поверхностные электрические и магнитные токи (применяются для определения поля излучения (рассеяния) в дальней зоне по известным значениям полей, рассчитанных в ближней зоне) и т.д. При решении интегральных уравнений с успехом, особенно для двумерных и по-

верхностных, используется ММ с различными базисными функциями. Гибридный подход, объединяющий достоинства МКЭ и интегральных уравнений, применяется при моделировании в областях с отрытыми границами: конечно-элементный – граничный интегральный метод – FE–BI [34, 35]. Кроме того, интегральные уравнения являются удобным инструментом для доказательства существования, единственности и корректности решения электродинамических задач.

6.1. Функции Грина

Чтобы проиллюстрировать основную идею введения функций Грина, обратимся к общему виду решения уравнения Пуассона (1.27) для скалярного потенциала электростатического поля $u(\mathbf{r})$ при условии неограниченной области (1.28):

$$\mathrm{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}V', \tag{6.1}$$

где $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ – радиус-вектор точек наблюдения и источника (интегрирования) соответственно; $\rho(\mathbf{r}')$ –плотность электрических зарядов в объеме V. Видно, что потенциал формируется в виде линейной суперпозиции точечных зарядов с амплитудой $\rho(\mathbf{r}')$. В рассматриваемом случае потенциал, создаваемый точечным зарядом единичной амплитуды, называется функцией Грина:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{6.2}$$

и выражение (6.1) можно представить в виде

$$\mathrm{u}(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}')G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathrm{d}V'. \tag{6.3}$$

Если для произвольного дифференциального уравнения найдена функция Грина, то тем самым фактически найдено решение этого уравнения.

6.1.1. Определение функции Грина волнового уравнения

Дельта-функция Дирака. Поскольку применение функций Грина основано на представлении произвольного источника суперпозицией точечных источников, необходимо определить математически понятие точечного источника. Скалярной функцией Грина $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, где $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ –

радиус-вектор точек наблюдения и источника соответственно (рис. 6.1), неоднородного уравнения Гельмгольца (1.20), (1.47) для волновой функции $\mathrm{u}(\mathbf{r})$ (произвольной компоненты поля)

$$\nabla^2 \mathrm{u}(\mathbf{r}) + k^2 \mathrm{u}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \tag{6.4}$$

называется вспомогательная функция, используемая при решении этого уравнения, которая сама удовлетворяет уравнению с той же левой частью и с δ-функцией (точечный источник) в качестве источника возбуждения $f(\mathbf{r})$:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{6.5}$$

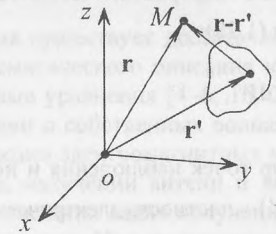


Рис. 6.1. Координатная система

Это уравнение не определяет полностью функцию G, нужно еще задать условия на границе области решения задачи (условия излучения). Полезно напомнить определение δ-функции. В качестве определения $\delta(x)$-функции для одномерного случая обычно рассматривают следующее интегральное соотношение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x')\,\mathrm{d}x = f(x'), \text{ при этом } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x')\,\mathrm{d}x = 1,$$

а для всякого ограниченного отрезка L

$$\int_{-L}^{+L} f(x)\delta(x-x')\,dx = \begin{cases} 0 \text{ при } x' \notin L, \\ f(x') \text{ при } x' \in L. \end{cases} \tag{6.6}$$

Переходя к определению δ-функции $\delta(\mathbf{r})$ для трехмерного случая, будем иметь:

$$\int_{V\to\infty} f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V = f(\mathbf{r}'), \text{ при этом } \int_{V\to\infty} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V = 1,$$

а для всякого ограниченного объема V

$$\int_V f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V = \begin{cases} 0 \text{ при } \mathbf{r}' \notin V, \\ f(\mathbf{r}') \text{ при } \mathbf{r}' \in V. \end{cases} \tag{6.7}$$

Аналогичные представления можно получить и для двухмерного случая.

Функция Грина свободного пространства. Для рассматриваемого случая уравнение (6.5) дополняем условием излучения (1.22):

$$\lim_{r\to\infty} r\left[(\partial G/\partial r) + ikG\right] = 0, \tag{6.8}$$

Чтобы найти G, вводим координатную систему с центром в точке $\mathbf{r}'$, что обеспечивает сферическую симметрию относительно этой точки. Поэтому уравнение (6.5) можно записать в выбранной сферической системе координат в виде

$$\frac{1}{r_1^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_1}\left[r_1^2 \frac{\mathrm{d}G(r_1,0)}{\mathrm{d}r_1}\right] + k^2 G(r_1,0) = -\delta(r_1-0), \tag{6.9}$$

где $r_1 = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. Если $r_1 \neq 0$, то выражение (6.9) можно записать в виде уравнения

$$\frac{\mathrm{d}^2\left[r_1 G(r_1,0)\right]}{\mathrm{d}r_1^2} + k^2 r_1 G(r_1,0) = 0, \tag{6.10}$$

которое с учетом (6.8) имеет хорошо известное решение

$$G(r_1,0) = Ae^{-ikr_1}/r_1. \tag{6.11}$$

Для определения неизвестного коэффициента A подставляем уравнение (6.11) в (6.9) и интегрируем по объему сферы с центром в точке $r_1 = 0$, устремляя в пределе ее радиус $\rho \to 0$. В результате находим $\mathrm{A} = (4\pi)^{-1}$ и $G(r_1,0) = e^{-ikr_1}/4\pi r_1$. Откуда в исходной системе координат (см. рис. 6.1) функция Грина свободного пространства есть

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{6.12а}$$

Следуя аналогичной процедуре, можно получить двумерную функцию Грина двумерного волнового уравнения типа (6.5)

$$G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') = \frac{1}{4i}\mathrm{H}_0^{(2)}\left(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|\right), \tag{6.12б}$$

где $\boldsymbol{\rho}=\mathbf{x}_0x+\mathbf{y}_0y$; $\mathrm{H}_0^{(2)}\left(k\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|\right)$ – функция Ханкеля нулевого порядка второго рода, которая при больших значениях аргумента имеет асимптотическое представление, отвечающее условию (6.8):

$$\mathrm{H}_0^{(2)}\left(k\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|\right)\Big|_{k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|\to\infty}\approx\sqrt{\frac{2}{k\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|}}e^{-i(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|-\pi/4)}. \qquad (6.12в)$$

И, наконец, одномерная функция Грина

$$G(x,x')=\frac{1}{2ik}e^{-ik|x-x'|}. \qquad (6.12г)$$

Заметим, что при любых граничных условиях функция Грина симметрична: $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=G(\mathbf{r}',\mathbf{r})$, и имеет особенности: $\ln\left|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right|$ – для двух и $\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{-1}$ – для трех измерений.

6.1.2. Спектральное представление функции Грина (пример одномерного представления)

Выберем для понимания основной идеи спектральное преставление одномерной функции Грина, отличное от рассмотренного п.п. 6.1.1, которое является более сложным и широко используется при решении ряда задач (возбуждение волноводов, распространение в слоистых средах и т.п.). Волновое уравнение (6.5) принимает вид

$$\frac{d^2G}{dx^2}+k^2G=-\delta(x-x'),\quad G(\pm\infty,x')=0. \qquad (6.13)$$

Поскольку $-\infty<x<+\infty$, представим функцию G в виде

$$G(x,x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\chi_x,x')e^{i\chi_xx}\mathrm{d}\chi_x. \qquad (6.14)$$

В свою очередь

$$\delta(x-x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\chi_x(x-x')}\mathrm{d}\chi_x. \qquad (6.15)$$

Подставив равенства (6.14), (6.15) в (6.13), находим

$$g(\chi_x,x')=\frac{e^{-i\chi_xx'}}{\chi_x^2-k^2}, \qquad (6.17)$$

и окончательно

$$G(x,x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\chi_x(x-x')}}{\chi_x^2-k^2}\mathrm{d}\chi_x. \qquad (6.18)$$

Тождественность представлений (6.18) и (6.12) доказывается путем вычисления несобственного интеграла в (6.18), переходом в комплексную плоскость и выбором соответствующего контура интегрирования, что будет продемонстрировано далее для трехмерной функции Грина.

6.1.3. Спектральное представление трехмерной функции Грина свободного пространства

Решение (6.5) для трехмерной задачи запишем в терминах фурье-интеграла

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\boldsymbol{\chi})e^{i\boldsymbol{\chi}\mathbf{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{\chi}, \qquad (6.19)$$

где $\boldsymbol{\chi}=\mathbf{x}_0\chi_x+\mathbf{y}_0\chi_y+\mathbf{z}_0\chi_z$; $\exp(i\boldsymbol{\chi}\mathbf{r})=\exp i(\chi_xx+\chi_yy+\chi_zz)$ – собственные функции решения однородного уравнения (типа (6.4)) $\nabla^2u+\chi^2u=0$, в котором $\chi^2=|\boldsymbol{\chi}|^2$ – собственное значение; $g(\boldsymbol{\chi})=g(\chi_x,\chi_y,\chi_z)$; $\mathrm{d}\boldsymbol{\chi}=\mathrm{d}\chi_x\mathrm{d}\chi_y\mathrm{d}\chi_z$. Фактически представление (6.19) можно трактовать как разложение $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ по собственным функциям. Подставляем равенство (6.19) в (6.5) и учитывая, что

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\boldsymbol{\chi}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\mathrm{d}\boldsymbol{\chi}, \qquad (6.20)$$

находим

$$g(\boldsymbol{\chi})=\frac{e^{-i\boldsymbol{\chi}\mathbf{r}'}}{(2\pi)^3\left(\chi^2-k^2\right)}. \qquad (6.21)$$

Поэтому спектральное представление трехмерной функции Грина свободного пространства имеет следующий канонический вид:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\boldsymbol{\chi}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\chi^2-k^2}\mathrm{d}\boldsymbol{\chi}=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\chi_x(x-x')+i\chi_y(y-y')+i\chi_z(z-z')}}{\chi_x^2+\chi_y^2+\chi_z^2-k^2}\mathrm{d}\chi_x\mathrm{d}\chi_y\mathrm{d}\chi_z, \qquad (6.22)$$

который в зависимости от решаемой задачи и необходимости учитывать граничные условия трансформируется для удобства вычисления несобственного интеграла.

Покажем, что представления (6.22) и (6.12а) тождественны. Для этого введем новые переменные

$$\chi_x = \chi\sin\theta\cos\varphi,\ \chi_x = \chi\sin\theta\sin\varphi,\ \chi_z = \chi\cos\theta, \tag{6.23а}$$

так что

$$d\boldsymbol{\chi} = \chi^2\sin\theta d\chi d\theta d\varphi. \tag{6.23б}$$

Кроме того, поскольку $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ обладает сферической симметрией относительно точки $\mathbf{r}'$, значение $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ не зависит от направления $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Следовательно, можно выбрать для оценки G произвольное направление $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, которое будет совпадать с осью oz. В результате формулу (6.22) перепишем как

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\chi\cos\theta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{\chi^2-k^2}\chi^2\sin\theta d\chi d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\int_0^\infty\left[e^{-i\chi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}-e^{i\chi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]\frac{\chi d\chi}{\chi^2-k^2} = \tag{6.24}$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi e^{-i\chi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{\chi^2-k^2}d\chi.$$

Для оценки несобственного интеграла (6.24) перейдем в комплексную плоскость χ и положим, что среда имеет потери, т.е. $k\to k-i\alpha$, где α – положительная и малая величина. Тогда интеграл в (6.24) вычисляется так

$$I = \lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi e^{-i\chi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{\chi^2-(k-i\alpha)^2}d\chi. \tag{6.25}$$

Интеграл (6.52) имеет два полюса: $\chi_c = \pm(k-i\alpha)$, где индекс «c» означает комплексность χ_c. Чтобы удовлетворить условию излучения на бесконечности (6.8), необходимо выбрать контур интегрирования в соответствии с рис. 6.2 и использовать теорему Коши о вычетах. Тогда

$$I_c = \lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi_c e^{-i\chi_c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{\chi_c^2-(k-i\alpha)^2}d\chi_c = -2\pi i\times(\text{вычет при } \chi_c = k-i\alpha), \tag{6.26}$$

где знак минус взят из-за обхода контура интегрирования по часовой стрелке, Вычет в точке $\chi_c = k-i\alpha$ равен $\lim_{\alpha\to 0}\left[e^{-i(k-i\alpha)|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/2\right] =$ $= e^{-i(k-i\alpha)|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/2 = e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/2$ и $I_c = -2\pi i\left(e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/2\right)$.

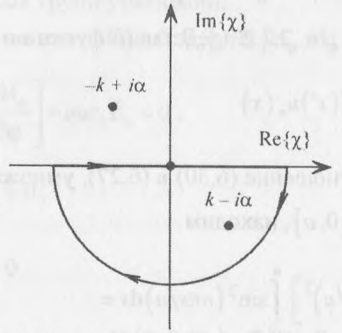


Рис. 6.2. Выбор контура интегрирования

Соответственно равенство (6.24) принимает традиционный вид (6.12а), соответствующий решению волнового уравнения (6.5) с условием убывания на бесконечности (6.8).

6.1.4. Спектральное представление функции Грина для ограниченной области решения

Для регулярных областей решения (прямоугольной, круглой и т.п.), где собственные функции волнового уравнения могут быть определены аналитически, функции Грина находятся в виде разложения по этим функциям. В случае областей сложной формы подобные представления для каждой из регулярных областей сшиваются на границах областей (см. п. 6.7). Однако при этом задача существенно усложняется и пропадает их главная ценность – простота сведения многих задач рассеяния и возбуждения электромагнитных волн, сначала формулируемых в терминах дифференциальных уравнений, к интегральным уравнениям, в которых граничные условия излучения уже учтены при выборе функции Грина. Проиллюстрируем такой подход для простейшего одномерного волнового уравнения с нулевыми граничными условиями

$$\frac{d^2G}{dx^2}+k^2G = -\delta(x-x'),\quad G(0,x') = G(a,x') = 0. \tag{6.27}$$

Собственные функции u_n и собственные значения λ_n находятся из уравнения (см. (2.9), (2.10)):

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u}_n}{\partial x^2} + k^2 \mathrm{u}_n = \lambda_n \mathrm{u}_n, \quad \mathrm{u}_n(0) = \mathrm{u}_n(a) = 0, \tag{6.28}$$

и равны

$$\mathrm{u}_n(x) = \sin(n\pi x/a); \quad \lambda_n = k^2 - (n\pi/a)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.29}$$

В соответствии с п. 2.2.2 представим функцию Грина как

$$G(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x') u_n(x). \tag{6.30}$$

Подставив соотношение (6.30) в (6.27), умножая на $u_n(x)$ и интегрируя на интервале $[0, a]$, находим

$$g_n(x')\left[k^2 - (n\pi/a)^2\right] \int_0^a \sin^2(n\pi x/a)\,\mathrm{d}x = \tag{6.31}$$

$$= -\int_0^a \sin(n\pi x/a)\,\delta(x - x')\,\mathrm{d}x,$$

или для коэффициента $g_n(x')$

$$g_n(x') = -\frac{2}{a\left[k^2 - (n\pi/a)^2\right]} \sin(n\pi x'/a). \tag{6.32}$$

Окончательно выражение для функции Грина принимает вид

$$G(x, x') = -\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x/a)\sin(n\pi x'/a)}{k^2 - (n\pi/a)^2}. \tag{6.33}$$

К полученному выражению полезно вернуться после изучения п. 6.7.

6.2. Представление для поля в пространстве через функцию Грина (скалярная задача)

Краевые задачи электродинамики, связанные с возбуждением или дифракцией (рассеянием) электромагнитных волн на телах в трехмерном пространстве, являются векторными, что сильно усложняет их алгоритмизацию. В некоторых случаях, когда среда обладает плоскостной симметрией (существует направление в пространстве, вдоль которого характеристики среды не меняются) или симметрией вращения, возможна скаляризация краевых задач и понижение их размерности [4, 5].

6.2.1. Скаляризация трехмерных задач

Действительно, для области, где нет сторонних токов, уравнения Максвелла (1.15) в координатной форме, например для цилиндрической системы координат (ρ, φ, z) при условии $\partial/\partial z = 0$, можно представить в виде двух независимых групп уравнений:

E-поляризованное поле: $\mathbf{E}\{0, 0, \mathrm{E}_z\}$, $\mathbf{H}\{\mathrm{H}_\rho, \mathrm{H}_\varphi, 0\}$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \mathrm{H}_\varphi) - \frac{\partial \mathrm{H}_\rho}{\partial \varphi}\right] - i\omega\varepsilon_a \mathrm{E}_z = 0,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial \varphi} + i\omega\mu_a \mathrm{H}_\rho = 0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial \rho} - i\omega\mu_a \mathrm{H}_\varphi = 0. \tag{6.34а}$$

H-поляризованное поле: $\mathbf{H}\{0, 0, \mathrm{H}_z\}$, $\mathbf{E}\{\mathrm{E}_\rho, \mathrm{E}_\varphi, 0\}$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \mathrm{E}_\varphi) - \frac{\partial \mathrm{E}_\rho}{\partial \varphi}\right] + i\omega\mu_a \mathrm{H}_z = 0,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial \varphi} + i\omega\mu_a \mathrm{E}_\rho = 0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial \rho} - i\omega\varepsilon_a \mathrm{E}_\varphi = 0. \tag{6.34б}$$

Аналогичную форму записи можно получить и в декартовой системе координат. Из выражений (6.34), следует, что поляризация падающего и рассеянного объектом поля совпадают, т.е. в рассеянном поле не возникает компонент, которые были равны нулю в падающем поле. Это обстоятельство не связано ни с формой цилиндра, ни с тем, является ли он металлическим или диэлектрическим. Более того, оно имеет место для цилиндров, в которых ε_a – любая функция от поперечных координат. Таким образом, краевая задача может решаться относительно скалярной функции $\mathrm{u} = \{\mathrm{E}_z, \mathrm{H}_z\}$.

6.2.2. Интегральные представления

Пусть для рассматриваемого двумерного $\mathbf{R}^2$ случая (рис. 6.3) задан объект Ω_0 с границей Γ_0 и внешняя область Ω_∞ (граница Γ_∞) с расположенным в ней сторонними возбуждающими токами $f(\rho)$. В об-

ласти Ω_∞ волновая функция $u(\rho)$ удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца (6.4)

$$\nabla^2 u(\rho) + k^2 u(\rho) = f(\rho), \quad \rho \in \Omega_\infty. \tag{6.35}$$

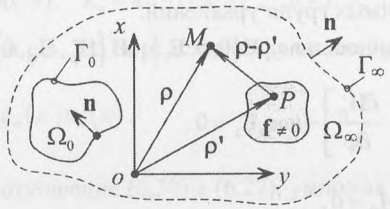


Рис. 6.3. Геометрия задачи

Волновая функция должна удовлетворять условию излучения (1.22) $\sqrt{\rho}\left[(\partial u/\partial\rho) + iku\right] = 0,\ \rho \to \infty$.

Наша предварительная цель состоит в получении интегрального представления функции $u(\rho)$ в области Ω_∞ с помощью значений функции $u(\rho)$ и ее производной на Γ_0, а также функции $f(\rho)$. Ключевую роль в таком представлении играет функция Грина (6.12б), удовлетворяющая уравнению типа (6.5) с граничными условиями (6.8)

$$\nabla^2 G(\rho,\rho') + k^2 G(\rho,\rho') = -\delta(\rho - \rho') \tag{6.36}$$

и явно записана в (6.12). Будем искать общий вид решения уравнения (6.35). С этой целью выполним в нем умножение на $G(\rho,\rho')$, а в (6.36) – на $u(\rho)$; произведем вычитание левых и правых частей и интегрирование полученных выражений по области Ω_∞ как функций ρ. В результате получим

$$\int_{\Omega_\infty} \left[G(\rho,\rho')\nabla^2 u(\rho) - u(\rho)\nabla^2 G(\rho,\rho')\right] d\Omega = \tag{6.37}$$
$$= \int_{\Omega_\infty} G(\rho,\rho') f(\rho)\, d\Omega + \int_{\Omega_\infty} u(\rho)\delta(\rho-\rho')\, d\Omega.$$

Выполним далее следующие преобразования:

а) поверхностный интеграл слева заменим контурным при помощи скалярной теоремы Грина

$$\int_\Omega (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)\, d\Omega = \oint_\Gamma \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) d\Gamma, \tag{6.38}$$

где предполагается, что входящие в (6.38) функции непрерывны вместе с производными до второго порядка везде вплоть до контура Г, который должен быть гладким по критерию Ляпунова (в каждой точке контура существует нормаль);

б) поскольку контур $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_\infty$, а на Γ_∞ выполняется условие излучения, то в контурном интеграле остается интеграл только по контуру Γ_0;

в) во втором слагаемом справа произведем интегрирование по формуле (6.7), что дает $u(\rho')$;

г) произведем замену обозначений $\rho \leftrightarrow \rho'$ (ввиду симметрии функции Грина эта процедура не распространяется на функцию Грина).

В итоге находим следующий общий вид решения уравнения (6.35)

$$\oint_{\Gamma_0}\left(G(\rho,\rho')\frac{\partial u(\rho')}{\partial n'} - u(\rho')\frac{\partial G(\rho,\rho')}{\partial n'}\right) d\Gamma' - \tag{6.39}$$
$$-\int_{\Omega_\infty} G(\rho,\rho') f(\rho')\, d\Omega' = \begin{cases} u(\rho) & \rho \in \Omega_\infty, \\ 0 & \rho \in \Omega_0, \end{cases}$$

где функция $G(\rho,\rho')$ определена в (6.12б), нормаль $\mathbf{n}$ – внешняя по отношению к области Ω_∞, а $d\Omega'$ означает интегрирование по области, где $f(\rho') \neq 0$. Из интегрального представления (6.39) следует, что для нахождения решения в некоторой области Ω_∞ надо располагать сведениями о его поведении на границе Γ_0: в контурный интеграл входят функции $u(\rho)$ и $\partial u(\rho)/\partial n$. Из (6.34) следует, что если $u(\rho)$ – электрическое поле на Γ_0, то $\partial u(\rho)/\partial n$ – магнитное и наоборот. Если объект Ω_0 отсутствует, то (6.39) характеризует внешнее (падающее) поле

$$u^{\text{вн}}(\rho) = -\int_{\Omega_\infty} G(\rho,\rho') f(\rho')\, d\Omega'. \tag{6.40}$$

Интегральное представление (6.39) является фундаментальным для получения интегральных уравнений для $u(\rho)$ и $\partial u(\rho)/\partial n$ $\left[\frac{\partial u}{\partial n} = (\nabla u)\mathbf{n}\right]$.

6.3. Общие сведения об интегральных уравнениях

Интегральными называются уравнения, в которых неизвестная функция входит под знак интеграла.

6.3.1. Интегральные уравнения Фредгольма второго и первого рода

При рассмотрении лишь линейных интегральных уравнений последние для одномерного случая могут быть представлены в виде

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds = f(x). \qquad (6.41)$$

Здесь $y(x)$ – искомая неизвестная функция; $K(x,s)$ – заданная функция двух переменных, называемая *ядром* интегрального уравнения; λ – числовой множитель (параметр уравнения); область интегрирования для простоты предполагалась одномерной, т.е. $x, s \in [a,b]$, а ядро $K(x,s)$, определенное в квадрате $a \le x \le b$, $a \le s \le b$, удовлетворяет условию

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,s)|\,dx\,ds < \infty. \qquad (6.42)$$

Уравнение (6.41) носит название неоднородного *уравнения Фредгольма второго рода*. Если в равенстве (6.41) $f(x)=0$, то получим *однородное уравнения Фредгольма второго рода*

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds = 0. \qquad (6.43)$$

Значения λ, при котором уравнение (6.43) имеет ненулевое решение $y(x)\neq 0$, называют *характеристическими числами* уравнения, а соответствующие им ненулевые решения – *собственными функциями*. Полагая, что в левой части уравнения (6.41) $y(x)$ отсутствует, получим *линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода*

$$\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds = f(x), \quad a \le x \le b. \qquad (6.44)$$

Трудности решения интегрального уравнения первого рода связаны с тем, что эта задача является *некорректной по Адамару*. Условия корректности по Адамару кроме очевидных требований существования и единственности решения (6.44), налагают еще два условия: 1) решение уравнения должно существовать при любой правой части уравнения (т.е. при любом внешнем воздействии); 2) малым возмущениям правой части уравнения соответствуют малые (того же порядка) возмущения решения. Интегральное уравнение (6.44) не удовлетворяет ни первому, ни второму условию корректности. Если какие-либо свойства ядра $K(x,s)$ и правой части $f(x)$ различны, например, одна из них имеет разрыв, а вторая нет, то уравнение (6.44) не может быть удовлетворено. Отсюда видно, что решение существует не при любой правой части. Далее к искомой функции $y(s)$ добавим быстро осциллирующую функцию, например $A\sin(\Omega s)$. Если ядро гладкое, то при любой величине A можно выбрать достаточно большую величину Ω так, что $\left|\int_a^b K(x,s)\,A\sin(\Omega s)\,ds\right| < \varepsilon$, где ε – любое сколь угодно малое (но конечное) число. Иначе говоря, как угодно малому возмущению правой части (добавление ε) соответствует как угодно большое возмущение решение (добавление к нему $A\sin(\Omega s)$). Заметим, что в задачах электродинамики некорректность задачи решения интегрального уравнения первого рода проявляется заметным образом не всегда. Это связано с тем, что правая часть уравнения (6.44) не произвольная (например, при падении плоской волны на объект), а является полем, удовлетворяющим уравнениям Максвелла (как и ядро). В противном случае необходимо трансформировать к интегральному уравнению второго рода либо использовать общий метод регуляризации некорректно поставленных задач, предложенный А.Н. Тихоновым [4, 5]. Применительно к интегральному уравнению первого рода общий метод регуляризации заключается в следующем. Решение уравнения (6.44) заменяют отысканием минимума следующего функционала:

$$\Phi_1[x, y(s)] = \left\| \int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds - f(x) \right\|. \qquad (6.45)$$

Обе задачи естественно эквивалентны и минимизация $\Phi_1[x, y(s)]$ также задача некорректная. Соответственно к этому функционалу добавляют норму решения $\|y(s)\|$ с некоторым положительным коэффициентом α, т.е. далее минимизируется функционал

$$\Phi_2\left[x, y(s)\right] = \Phi_1\left[x, y(s)\right] + \alpha \left\| y(s) \right\|. \qquad (6.46)$$

Здесь паразитная осциллирующая функция появиться не может, так как эта функция увеличила бы норму $y(s)$, участвующую в процессе минимизации. Задача становится корректной, но не соответствующей первоначальной задаче, поскольку норму $y(s)$ добавили совершенно произвольно. Для того чтобы найти решение исходной задачи, отыскивают минимум функционала $\Phi_2\left[x, y(s)\right]$ несколько раз при все уменьшающемся значении множителя α до тех пор, пока не появится паразитная колеблющаяся функция. Решение $y(s)$, соответствующее минимальному значению α, при котором нет паразитной колеблющейся функции, принимается за приближенное решение задачи. Доказано, что при $\alpha \to 0$ решение $y(s)$ стремится к точному решению, а норма разности между правой и левой частями уравнения стремится к нулю.

6.3.2. Сингулярные интегральные уравнения

Многие электродинамические задачи (рис. 1.7, экранированные полосковые, щелевые и другие структуры) и их алгоритмизация основаны на уравнениях типа (6.41), (6.43), (6.44), ядра которых содержат в неявном виде логарифмические особенности ($\ln|u-v|$ при $u \to v$) или сингулярности типа Коши $\left[(\tau - t)^{-1} \text{ при } \tau \to t\right]$. Такие интегральные уравнения называются сингулярными (СИУ) [3–5, 16]. Типичным примером является СИУ типа Коши

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = f(t), \qquad (6.47)$$

где L – гладкая кривая Ляпунова (кривая с непрерывной кривизной); $\varphi(\tau)$ – функция точек этой кривой; ядро СИУ (6.47) имеет сингулярность $(\tau - t)^{-1}$.

Процедура алгоритмизации задачи, как правило, включает в себя простое *усечение бесконечных рядов* в ядрах уравнений (см. далее п. 6.7). В результате такая процедура с математической точки зрения равносильна переходу от корректно поставленной задачи (СИУ первого рода не относятся к классу некорректных задач) к некорректной – уравнению Фредгольма первого рода. В результате точность и устойчивость результатов решения зависит от числа слагаемых в ядрах уравнений и в

представлении решений, а также от выбора базиса $\{\mathbf{e}_n\}$. Именно этим объясняется явление *относительной сходимости* решения, требующее выбора этих параметров и проверки соответствия решения физической задаче.

Кроме того, известно, что наличие ребер на граничных поверхностях приводит к неоднозначному решению уравнений Максвелла, из которых только одно наиболее адекватно описывает исследуемое явление. Поэтому для обеспечения единственности решения необходимо ввести некоторое дополнительное физическое ограничение на поля, известное как условие на ребре (п.п. 1.3.4).

В литературе доказано существование решения СИУ, ядра которых содержат в неявном виде логарифмические особенности или сингулярности типа Коши, для функций, принадлежащих к *классу* H^*. Определим прежде класс функций $\varphi(\tau) \in H$, удовлетворяющих так называемому *условию Гельдера*: функции принадлежат классу H, если для двух точек τ_1, τ_2 в любом замкнутом интервале на контуре $[-t_k, +t_k]$ кривой $|\varphi(\tau_2) - \varphi(\tau_1)| < A|\tau_2 - \tau_1|^{\nu}$, где A, ν – положительные числа и $0 < \nu \le 1$. Соответственно по определению H^* есть класс функций, удовлетворяющих *условию Гельдера* для любых двух точек τ_1, τ_2 в любом замкнутом интервале, не включающем концов, а вблизи любого конца τ_k имеет вид $\varphi^*(\tau) = \varphi(\tau)/(t_k \pm \tau)^{\nu}$.

Решая интегральные уравнения, например, методом Галеркина с учетом особенности на ребрах (1.24), целесообразно в качестве базисных функций $\mathbf{u}_m$ использовать $\tilde{\mathbf{u}}_m(\tau) = \sigma^{-1}(\tau)\mathbf{u}_m(\tau)$, где $\{\mathbf{u}_m(\tau)\}$ – полная и ортогональная на $[-t_k, +t_k]$ с весом $\sigma^{-1}(\tau)$ система функций, удовлетворяющая необходимым по условию задачи граничным условиям. Вообще же к системе базисных функций предъявляются два основных, достаточно противоречивых требования. Во-первых, система функций должна как можно точнее описывать действительный характер распределения отыскиваемых полей (токов). Во-вторых, желательно аналитическое (наиболее простое) вычисление интегралов от произведения базисной функции на ядро интегрального уравнения (см. п. 6.7).

Более строгий подход к решению электродинамических задач с использованием базисов Трефтца – это применение математического аппарата теории СИУ, суть которого заключается в сведении СИУ к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода путем выделения сингулярности, а также процедура обращения (нахождения решения) уравнения [4, 5, 15].

6.4. Интегральные уравнения для внешних задач дифракции, получаемые с помощью функций Грина (двумерный случай)

Интегральные уравнения электродинамики разнообразны и существуют разные способы их вывода. При решении внешних задач электродинамики получение интегральных уравнений наиболее распространено. Вернемся к фундаментальному интегральному представлению (6.39) для получения некоторых интегральных уравнений относительно $u(\boldsymbol{\rho})$ и $\partial u(\boldsymbol{\rho})/\partial n$, учитывая различные свойства объекта Ω_0 (см. рис. 6.3).

6.4.1. Металлический объект

E-поляризация; интегральное уравнение первого рода. Пусть объект Ω_0 – идеально проводящий, $u(\boldsymbol{\rho}) \equiv E_z$, выполняются условия излучения (или убывание поля при наличии поглощения), а также следующее граничное условие для полного поля (см. рис. 6.3):

$$E_z(\boldsymbol{\rho}) = 0, \quad \boldsymbol{\rho} \in \Gamma_0. \tag{6.48}$$

Полагаем, что для полного поля отсутствуют изменения вдоль оси z (не только среда, но и источники возбуждения обладают плоскостной симметрией). Примером такой возбуждающей первичное поле функции является возбуждение нитью электрического тока $\mathbf{J}^{\text{ст}}$ с амплитудой I, расположенной в точке с координатами (ρ_0, φ_0): $\mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{J}^{\text{ст}} = \mathbf{z}_0 I \delta(\rho - \rho_0)\delta(\varphi - \varphi_0)$. Подставляя это выражение в (1.49), находим векторный электродинамический потенциал $\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{z}_0 \mu_a I G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$. Окончательно получаем из (1.48), учитывая, что $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$: $\mathbf{E}^{\text{вн}} = -i\omega\mathbf{A} = -\mathbf{z}_0 \dfrac{\omega\mu_a I}{4} H_0^{(2)}\left(k\left|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0'\right|\right)$. Учитывая асимптотику Функции Ханкеля (6.12в), можно также задать возбуждение плоской волной. С учетом сказанного представление (6.39) принимает вид

$$E_z^{\text{вн}}(\boldsymbol{\rho}) + \oint_{\Gamma_0} G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \frac{\partial E_z(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} d\Gamma' = \begin{cases} E_z(\boldsymbol{\rho}) & \boldsymbol{\rho} \in \Omega_\infty, \\ 0 & \boldsymbol{\rho} \in \Omega_0, \end{cases} \tag{6.49}$$

где в соответствии с соотношением (6.40) – $E_z^{\text{вн}}(\boldsymbol{\rho}) = -\int_{\Omega_\infty} G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') f(\boldsymbol{\rho}') d\Omega$.

Применяя (6.49) на Γ_0 и учитывая (6.48), получаем интегральное уравнение первого рода относительно $\partial E/\partial n$ на Γ_0, специфика которого обсуждена выше:

$$\oint_{\Gamma_0} G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \frac{\partial E_z(\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} d\Gamma' = -E_z^{\text{вн}}(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} \in \Gamma_0. \tag{6.50}$$

Учитывая, что $E_z(\boldsymbol{\rho}')$ – электрическое поле, согласно (6.34), значение $\partial E_z(\boldsymbol{\rho}')/\partial n$ – магнитное поле. Поскольку на поверхности металла магнитное поле испытывает скачок, то согласно (1.16) и п.п. 1.3.3 значение $\partial E_z(\boldsymbol{\rho}')/\partial n$ пропорционально поверхностному электрическому току.

H-поляризация; интегральное уравнение второго рода. Пусть объект Ω_0 – идеально проводящий, $u(\boldsymbol{\rho}) \equiv H_z$ и выполняется граничное условие для полного магнитного поля (см. рис. 6.3)

$$\partial H_z(\boldsymbol{\rho})/\partial n = 0, \quad \boldsymbol{\rho} \in \Gamma_0. \tag{6.51}$$

Первичное поле возбуждается нитью магнитного тока $\mathbf{M}^{\text{ст}}$ с амплитудой I, при этом выражение для $\mathbf{H}^{\text{вн}}$ получается аналогично предыдущему случаю с заменой $\varepsilon_a \to -\mu_a$. Тогда представление (6.41) выглядит как

$$H_z^{\text{вн}}(\boldsymbol{\rho}) + \oint_{\Gamma_0} H_z(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} d\Gamma' = \begin{cases} H_z(\boldsymbol{\rho}) & \boldsymbol{\rho} \in \Omega_\infty, \\ 0 & \boldsymbol{\rho} \in \Omega_0, \end{cases} \tag{6.52}$$

где в соответствии с уравнением (6.40) – $H_z^{\text{вн}}(\boldsymbol{\rho}) = -\int_{\Omega_\infty} G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') f(\boldsymbol{\rho}') d\Omega$.

Чтобы получить интегральное уравнение относительно H_z, можно перевести точку $\boldsymbol{\rho}$ на металлический контур и воспользоваться граничными условиями (6.51). Однако в отличие от предыдущего случая на контуре Γ_0 равно нулю не поле H_z, а его производная. Поэтому рассмотренная выше схема не работает, кроме того, интеграл в представлении (6.52) имеет сильную особенность. Для гладких тел можно исключить особенность из ядра интегрального уравнения, учитывая равенство (6.51), и воспользовавшись следующим соотношением:

$$\oint_{\Gamma_0} H_z(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} d\Gamma' = \frac{1}{2} H_z(\boldsymbol{\rho}) + \int_{\Gamma_0} H_z(\boldsymbol{\rho}') \frac{\partial G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')}{\partial n'} d\Gamma', \tag{6.53}$$

где интеграл с сильной особенностью заменяется интегралом в смысле главного значения, в котором особая точка $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}'$ исключена из области интегрирования и выделена в виде свободного члена. Доказательство формулы (6.55) подробно приведено в [4, 5] и сводится к следующему: интеграл в левой части (6.55) разбивается на интеграл по полуокружности малого радиуса с центром в точке $\boldsymbol{\rho}$ плюс оставшийся интеграл, который при стремлении радиуса полуокружности к нулю сводится к интегралу в смысле главного значения, в котором особая точка $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}'$ исключена из области интегрирования. Кроме того, если $\boldsymbol{\rho}\to\Gamma_0$ с внешней стороны Ω_0, то интеграл по полуокружности малого радиуса равен $\mathrm{H}_z(\boldsymbol{\rho})/2$; если же $\boldsymbol{\rho}\to\Gamma_0$ с внутренней стороны Ω_0, то интеграл по полуокружности малого радиуса равен $\mathrm{H}_z(\boldsymbol{\rho})/2$. Подставляя выражение (6.53) в (6.52) и преобразуя, получаем интегральное уравнение второго рода относительно тока на Γ_0

$$\frac{1}{2}\mathrm{H}_z(\boldsymbol{\rho})-\oint_{\Gamma_0}\mathrm{H}_z(\boldsymbol{\rho}')\frac{\partial G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')}{\partial n'}\mathrm{d}\Gamma' \;=\mathrm{H}_z^{\text{вн}}(\boldsymbol{\rho}),\quad \boldsymbol{\rho}\in\Gamma_0. \tag{6.54}$$

6.4.2. Диэлектрический объект

E-поляризация; двумерное интегральное уравнение второго рода. Пусть объект Ω_0 на рис. 6.3 – диэлектрическое тело, характеризуемое комплексной абсолютной диэлектрической проницаемостью $\tilde{\varepsilon}_a(\boldsymbol{\rho})$, в области Ω_∞ – однородным значением $\tilde{\varepsilon}_{a1}$; $\mathrm{u}(\boldsymbol{\rho})\equiv\mathrm{E}_z$, выполняется условие убывания поля на бесконечности и граничные условия для полного поля в виде непрерывности касательных компонент электрического E_z и магнитного $\partial\mathrm{E}_z/\partial n$ полей (1.16). Следуя рассмотренной выше методике можно получить систему интегральных уравнений второго рода относительно E_z и $\partial\mathrm{E}_z/\partial n$ на Γ_0. Мы же продемонстрируем иную технику получения интегрального уравнения. В области Ω_0 полное электрическое поле E_z удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2\mathrm{E}_z(\boldsymbol{\rho})+k_0^2\tilde{\varepsilon}\mathrm{E}_z(\boldsymbol{\rho})=f(\boldsymbol{\rho}),\quad \boldsymbol{\rho}\in\Omega_0, \tag{6.55}$$

где $k_0=\omega^2\varepsilon_0\mu_0$ – постоянная распространения свободного пространства; $\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho})$ – относительная диэлектрическая проницаемость области Ω_0, зависящая в общем случае от точки $\boldsymbol{\rho}\in\Omega_0$. Прибавляя и вычитая в ле-

вой части (6.57) слагаемое $k_0^2\tilde{\varepsilon}_1\mathrm{E}_z$, мы сводим задачу в неоднородном пространстве к задаче в однородном свободном пространстве с иным возбуждением в правой части

$$\nabla^2\mathrm{E}_z(\boldsymbol{\rho})+k_0^2\tilde{\varepsilon}_1(\boldsymbol{\rho})\mathrm{E}_z(\boldsymbol{\rho})=f(\boldsymbol{\rho})-\mathrm{K}_z(\boldsymbol{\rho}),\quad \boldsymbol{\rho}\in\Omega_\infty, \tag{6.56}$$

где $\mathrm{K}_z(\boldsymbol{\rho})=k_0^2(\tilde{\varepsilon}-\tilde{\varepsilon}_1)\mathrm{E}_z$, $\boldsymbol{\rho}\in\Omega_0$ – индуцированное возбуждение.

Используя формулу (6.39) и учитывая, что интеграл по Γ_∞ исчезает из-за того, что для поля и для функции Грина выполняются условия излучения, получаем следующую формулу, которую можно рассматривать как поле, созданное заданными источниками: первое слагаемое – результат возбуждения реальными токами в отсутствии объекта Ω_0 (полагаем, что источник возбуждения обладают плоскостной симметрией), а второе – индуцированное возбуждение:

$$\mathrm{E}_z(\boldsymbol{\rho})=\mathrm{E}_z^{\text{вн}}(\boldsymbol{\rho})-\int_{\Omega_0}\mathrm{K}_z(\boldsymbol{\rho}')G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\mathrm{d}\Omega'. \tag{6.57}$$

Для точек внутри тела $\boldsymbol{\rho}\in\Omega_0$ формула (6.57) представляет собой *интегральное уравнение второго рода*, в котором неизвестное поле E_z внутри диэлектрика содержится и в свободном члене, и под интегралом. Для точек вне тела $\boldsymbol{\rho}\notin\Omega_0$ равенство (6.57) уже не интегральное уравнение, а выражение для поля вне диэлектрика через поле в диэлектрике.

Алгоритмы нахождения решений интегральных уравнений обсуждались в гл. 2 и п. 6.3.

6.5. Векторное представление поля в пространстве через функцию Грина

Интегральное представление (6.39) является фундаментальным для получения интегральных уравнений в двумерном случае. В трехмерном векторном случае (рис. 6.4) аналогичное представление, полагая, что присутствуют только сторонние электрические токи $\mathbf{J}^{\text{ст}}\neq 0$, называется *формулами Стреттона–Чу* и имеет вид [4, 5, 15]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\int_{V_\infty}\left\{i\omega\mu_a\mathbf{J}^{\text{ст}}+\frac{i}{\omega\varepsilon_a}\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{J}^{\text{ст}}\right)\right\}G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}V'+ \tag{6.58a}$$
$$+\oint_S\left[\nabla G\times(\mathbf{n}'\times\mathbf{E})-i\omega\mu_a G(\mathbf{H}\times\mathbf{n}')-(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{E})\nabla G\right]\mathrm{d}s',$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r})=\int_{V_\infty} G(r-r')\left(\nabla\times\mathbf{J}^{\text{ст}}\right)dV'+$$
$$+\oint_S\left[\nabla G\times(\mathbf{n}'\times\mathbf{H})+i\omega\varepsilon_a G(\mathbf{E}\times\mathbf{n}')-(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{H})\nabla G\right]ds', \qquad (6.58б)$$

где в соответствии с формулой (6.12а) $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$; $S=S_0\cup S_\infty$. Если геометрия задачи и электромагнитное поле не зависят от координаты z ($\partial/\partial z=0$), то переход к двумерному случаю в (6.58) осуществляется очевидным образом согласно рис. 6.3.

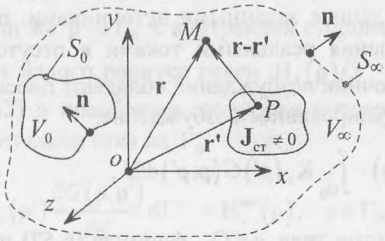


Рис. 6.4. Геометрия трехмерной задачи

6.6. Векторные интегральные уравнения для внешних задач дифракции, получаемые с помощью функции Грина (трехмерный случай)

Продемонстрируем получение интегрального уравнения, когда объект V_0 – идеально проводящий (см. рис. 6.4), а электромагнитное поле возбуждается локальными сторонними электрическими токами $\mathbf{J}^{\text{ст}}$.

6.6.1. Металлический объект

Электромагнитное поле вне V_0 должно удовлетворять уравнениям Максвелла (1.15), условиям излучения (1.22), (5.121) и граничному условию на поверхности S_0: $\mathbf{n}\times\mathbf{E}=0$ на S_0.

Применим интегральное представление (6.58б) для магнитного поля вне поверхности S_0, преобразовав первое слагаемое в этом представлении, поскольку оно содержит неудобную операцию ротора над сторонними источниками. Для этого воспользуемся векторным тождеством (1.5г), теоремой Остроградского–Гаусса для ротора $\int_V(\nabla\times\mathbf{A})dV=\int_S\mathbf{ds}\times\mathbf{A}$

и, опуская детали преобразования (см., например, в [12, стр. 323]), запишем выражение (6.58б) в виде

$$\frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty}\mathbf{J}^{\text{ст}}\times\nabla'\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'+\frac{1}{4\pi}\oint_S\left[\nabla'\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\times(\mathbf{n}'\times\mathbf{H})-\right.$$
$$\left.-i\omega\varepsilon_a(\mathbf{n}'\times\mathbf{E})\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}-(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{H})\nabla'\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]ds'=\begin{cases}\mathbf{H}(\mathbf{r}) & \mathbf{r}\in V_\infty,\\ 0 & \mathbf{r}\in V_0.\end{cases} \qquad (6.59)$$

где $\mathbf{n}'$ – внешняя к области V_∞ нормаль, знак штрих означает, что соответствующие операции осуществляются по координатам точки интегрирования. Объемный интеграл берется по области задания сторонних токов $\mathbf{J}^{\text{ст}}$ и представляет собой магнитное поле заданных источников в отсутствие идеально проводящего тела

$$\mathbf{H}^{\text{вн}}(\mathbf{r})=\int_{V_\infty}\mathbf{J}^{\text{ст}}\times\nabla'G(r-r')dV'. \qquad (6.60)$$

Вводим в соответствии с п.п. 1.3.3 поверхностный электрический ток $\mathbf{J}_s=\mathbf{n}\times\mathbf{H}$, наведенный на поверхности идеально проводящего тела. Учитываем, что в случае идеально проводящего тела S_0 выполняется граничное условие для касательной составляющей электрического поля, а также в силу граничного условия (1.16) соотношение $\mathbf{nH}=0$ на S_0 для нормальной компоненты магнитного поля. Интеграл по S_∞ пропадает в силу условия излучения (1.22). В результате интегральное представление (6.59) можно переписать так

$$\mathbf{H}^{\text{вн}}(\mathbf{r})+\frac{1}{4\pi}\oint_{S_0}\left(\nabla'\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\times\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')\right)ds'=\begin{cases}\mathbf{H}(\mathbf{r}) & \mathbf{r}\in V_\infty,\\ 0 & \mathbf{r}\in V_0.\end{cases} \qquad (6.61)$$

Для получения интегрального уравнения относительно поверхностного электрического тока $\mathbf{J}_s$ перейдем в соотношении (6.61) к пределу, устремляя произвольную точку M, характеризуемую вектором $\mathbf{r}$ (см. рис. 6.4), к поверхности S_0, т.е. $\mathbf{r}\to\mathbf{r}'\in S_0$. Тогда, используя известное свойство при $\mathbf{r}\to\mathbf{r}'$ к поверхности S_0 из области V_∞ [4, 5]:

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}'\in S_0}\oint_{S_0}\left(\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')\times\nabla'\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)ds'=$$
$$=\oint_{S_0}\left(\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')\times\nabla'\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)ds'-2\pi\mathbf{J}_s(\mathbf{r})\times\mathbf{n},\quad \mathbf{r}\in S_0, \qquad (6.62)$$

где интеграл аналогичен выражению (6.61), но исключена сингулярная точка при $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$. Учитывая, что на поверхности S_0 $\mathbf{H}(\mathbf{r})\big|_{S_0}=\mathbf{J}_s\times\mathbf{n}$, получаем

$$\frac{1}{2}\mathbf{J}_s\times\mathbf{n}=\mathbf{H}^{\text{вн}}(\mathbf{r})-\frac{1}{4\pi}\oint_{S_0}\left(\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')\times\nabla'\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\mathrm{d}s',\quad \mathbf{r}\in S_0. \tag{6.63}$$

Умножив уравнение (6.63) векторно на $\mathbf{n}$, будем иметь *интегральное уравнение Фредгольма второго рода* типа (6.41) относительно неизвестной поверхностной плотности электрического тока на поверхности идеально проводящего тела

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r})=2\mathbf{n}\times\mathbf{H}^{\text{вн}}(\mathbf{r})-\frac{1}{2\pi}\oint_{S_0}\left(\mathbf{n}\times\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')\times\nabla'\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\mathrm{d}s',\quad \mathbf{r}\in S_0. \tag{6.64}$$

В ядре уравнения исключена сингулярная точка при $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$, поэтому оно удовлетворяет условию (6.42) и для (6.64) применима вся теория интегральных уравнений Фредгольма второго рода (п.п. 6.3.1). Для численного решения последних обычно применяют методы сведения к решению СЛАУ, подробно рассмотренные в п. 2.2, 2.4. В уравнение (6.64) интеграл представляет рассеянное объектом магнитное поле, которое вычисляется после нахождения тока $\mathbf{J}_s(\mathbf{r})$ путем решения интегрального уравнения (6.64).

6.6.2. Диэлектрический объект

Продемонстрируем иную технику получения интегрального уравнения, когда объект V_0 – диэлектрический объект с параметрами $\tilde{\varepsilon}_a(\mathbf{r}),\mu_a=\mu_0$ (см. рис. 6.4), электромагнитное поле возбуждается локальными сторонними электрическими токами $\mathbf{J}^{\text{ст}}$. Электромагнитное поле вне V_0 должно удовлетворять уравнениям Максвелла (1.15)

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}^{\text{ст}}+i\omega\varepsilon_0\mathbf{E},\quad \nabla\times\mathbf{E}=-i\omega\mu_0\mathbf{H}, \tag{6.65}$$

внутри V_0 аналогичным уравнениям с электрофизическими параметрами объекта

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}^{\text{ст}}+i\omega\tilde{\varepsilon}_a(\mathbf{r})\mathbf{E},\quad \nabla\times\mathbf{E}=-i\omega\mu_0\mathbf{H}, \tag{6.66}$$

условиям излучения (1.22), (5.121) и граничным условиям на поверхности S_0:

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)=0,\quad \mathbf{n}\times(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)=0. \tag{6.67}$$

Введем формально в уравнения (6.66) так называемый электрический ток поляризации $\mathbf{J}^{\text{пол}}$, прибавляя и вычитая в правой части слагаемое $i\omega\varepsilon_0\mathbf{E}$. Тогда вместо уравнений (6.65), (6.66) запишем следующую систему уравнений для однородной среды с параметрами ε_0, μ_0. но с иными возбуждающими источниками в правой части:

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}^{\text{ст}}+\mathbf{J}^{\text{пол}}+i\omega\varepsilon_0\mathbf{E},\quad \nabla\times\mathbf{E}=-i\omega\mu_0\mathbf{H}, \tag{6.68}$$

где $\mathbf{J}^{\text{пол}}=i\omega\varepsilon_0\left[\tilde{\varepsilon}_a(\mathbf{r})-1\right]\mathbf{E}$. Уравнения (6.68) справедливы для любой точки $M(\mathbf{r})$ всей области: $M(\mathbf{r})\in V_0\cup V_\infty$, ток $\mathbf{J}^{\text{пол}}$ отличен от нуля только в области V_0, а ток $\mathbf{J}^{\text{ст}}$ – только в области задания точек Q (см. рис. 6.4).

Воспользуемся интегральным представлением (6.58а) для электрического поля. В этом случае второе слагаемое в (6.58а) в силу условия излучения обращается в нуль. В результате имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r})=&-\int_{V_\infty}\left\{i\omega\mu_0\mathbf{J}^{\text{ст}}+\frac{i}{\omega\varepsilon_0}\nabla'\left(\nabla'\cdot\mathbf{J}^{\text{ст}}\right)\right\}G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}V'-\\&-\int_{V_0}\left\{i\omega\mu_0\mathbf{J}^{\text{пол}}+\frac{i}{\omega\varepsilon_0}\nabla'\left(\nabla'\cdot\mathbf{J}^{\text{пол}}\right)\right\}G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}V'.\end{aligned} \tag{6.69}$$

Первое слагаемое в (6.69) берется по области задания сторонних токов $\mathbf{J}^{\text{ст}}$ и представляет собой магнитное поле заданных источников в отсутствии диэлектрического тела

$$\mathbf{E}^{\text{вн}}(\mathbf{r})=-\int_{V_\infty}\left\{i\omega\mu_0\mathbf{J}^{\text{ст}}+\frac{i}{\omega\varepsilon_0}\nabla'\left(\nabla'\cdot\mathbf{J}^{\text{ст}}\right)\right\}G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}V'. \tag{6.70а}$$

Соответственно (6.69) выглядит как

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\mathbf{E}^{\text{вн}}(\mathbf{r})-\int_{V_0}\left\{i\omega\mu_0\mathbf{J}^{\text{пол}}+\frac{i}{\omega\varepsilon_0}\nabla'\left(\nabla'\cdot\mathbf{J}^{\text{пол}}\right)\right\}G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}V', \tag{6.70б}$$

где $\mathbf{J}^{\text{пол}}=i\omega\varepsilon_0\left[\tilde{\varepsilon}_a(\mathbf{r})-1\right]\mathbf{E}$.

Для однородного диэлектрического тела и отсутствия потерь $\nabla'\cdot\mathbf{J}^{\text{пол}}=i\omega\varepsilon_0(\varepsilon-1)\nabla'\cdot\mathbf{E}=0$ и соотношение (6.70б) переходит в следующее интегральное представление, где второе слагаемое характеризует рассеянное поле $\mathbf{E}^{\text{рас}}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{\text{вн}}(\mathbf{r}) + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon - 1) \int_{V_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'. \qquad (6.71)$$

Для точек внутри тела $r \in V_0$ соотношение (6.71) представляет собой *интегральное уравнение второго рода*, в котором неизвестное полное поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ внутри диэлектрика содержится и в свободном члене, и под интегралом. Для точек вне тела $\mathbf{r} \notin V_0$ равенство (6.71) уже не интегральное уравнение, а выражение для поля вне диэлектрика через поле в диэлектрике. Недостаток подобного уравнения очевиден – большая размерность задачи. Интегральные уравнения первого и второго рода для решения различных электродинамических задач, обсуждение особенностей в ядрах уравнений и алгоритма их решения подробно изложены в литературе, например [4, 5].

6.7. Интегральные уравнения при решении внутренних задач электродинамики

В традиционном курсе электродинамики [11–16], как правило, рассматриваются краевые задачи определения собственных чисел и собственных функций однородных прямоугольного и круглого металлических волноводов. В п.п. 2.3.2 на основе проекционного наложения граничных условий рассмотрена более сложная задача о стыке двух регулярных волноводов с различными поперечными сечениями. Сведение краевой задачи определения собственных чисел и собственных функций к интегральному уравнению при решении внутренних задач электродинамики рассмотрим на примере Г-образного волновода с продольно-однородным заполнением (рис. 6.5), что поможет понять структуру сингулярности интегрального уравнения и выбор базисных функций с учетом особенности на ребрах.

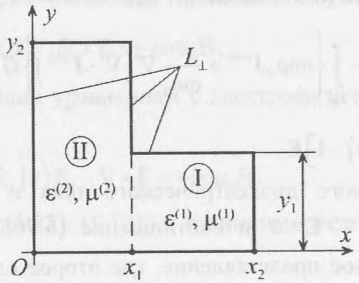


Рис. 6.5. Г-образный волновод с продольно-однородным заполнением

Заметим, что волноводы сложных сечений обладают рядом преимуществ по сравнению с волноводами простейших сечений, в частности, они имеют большую рабочую полосу частот на низшей волне, меньшие габариты и т.д. Аналогично можно исследовать экранированные полосковые, щелевые и другие волноведущие структуры (см. рис. 2.4).

Конкретное рассмотрение проведем на примере Е-волн. Разобьем поперечное сечение волновода на две области, как показано на рис. 6.5. Для *Е-волн,* распространяющихся вдоль оси z согласно (1.50), (1.51) при очевидных переобозначениях

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}(x,y)e^{-i\gamma z}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{h}(x,y)e^{-i\gamma z}, \quad \nabla_\perp^2 e(x,y) + \chi^2 e(x,y) = 0 \qquad (6.72)$$

и отличны от нуля составляющие e_x, e_y, e_z, h_x, h_y. Откуда для продольной составляющей электрического поля e_z справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} + \chi^2 e_z = 0, \quad \chi^2 = k_0^2 \varepsilon\mu - \gamma^2. \qquad (6.73)$$

Уравнение (6.73) для каждой из выделенных областей решается методом разделения переменных. Общее решение (6.73), справедливое для обеих областей, можно представить в тригонометрической форме

$$e_z = \left(A\cos\chi_x x + B\sin\chi_x x\right)\left(C\cos\chi_y y + D\sin\chi_y y\right), \qquad (6.74)$$

где A, B, C, D – неизвестные константы. Для того чтобы решение (6.74) использовать для расчета собственных волн Г-образного волновода, необходимо наложить на него соответствующие условия на граничном контуре $L_\perp$ поперечного сечения волновода.

Для металлического волновода справедливы граничные условия (1.16):

– для 1-й области $e_z^{(1)} = 0$ при $y = 0, y = y_1$;
$e_z^{(1)} = 0$ при $x = x_2$;

– для 2-й области $e_z^{(2)} = 0$ при $y = 0, y = y_2$;
$e_z^{(2)} = 0$ при $x = 0$. (6.75)

С учетом граничных условий (6.75) электрические поля в каждой из областей можно представить в виде

$$e_z^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(1)} \sin\chi_{xm}^{(1)}(x_2 - x)\sin\frac{m\pi y}{y_1},$$
$$e_z^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(2)} \sin\chi_{xm}^{(2)} x \sin\frac{m\pi y}{y_2}, \qquad (6.76)$$

где $\chi_{xm}^{(i)} = \sqrt{\chi_i^2 - (m\pi y/y_i)^2}$, $\chi_i^2 = k_0^2\varepsilon_i\mu_i - \gamma^2$, $i = 1, 2$, $A_m^{(1)}$, $A_m^{(2)}$ – неизвестные постоянные.

Электрическое поле $e_z^{(1)}$ в первой области разложено по системе функций $\{\sin(m\pi y/y_1)\}$, ортогональных на отрезке $[0, y_1]$, а поле $e_z^{(2)}$ – по системе функций $\{\sin(m\pi y/y_2)\}$, ортогональных, соответственно, на отрезке $[0, y_2]$. Так как при $x = x_1$, $e_z^{(1)} = e_z^{(2)} \equiv f_z(y)$, то выразим постоянные $A_m^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ как коэффициенты Фурье (см. запись (2.4)) в рядах (6.76) через неизвестное поле $f_z(y)$ в плоскости $x = x_1$:

$$\sin\left[\chi_{xm}^{(1)}(x_2 - x_1)\right] A_m^{(1)} = \frac{2}{y_1}\int_0^{y_1} f_z(y')\sin\frac{m\pi y'}{y_1}\,dy',$$
$$\sin\left[\chi_{xm}^{(2)} x_1\right] A_m^{(2)} = \frac{2}{y_1}\int_0^{y_1} f_z(y')\sin\frac{m\pi y'}{y_2}\,dy'. \qquad (6.77)$$

Заметим, что при записи второй формулы в (6.77) было использовано условие $e_z = 0$ при $x = x_1$, $y \in [y_1, y_2]$.

С помощью соотношения (1.52) получим

$$h_y = -\frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2}\frac{\partial e_z}{\partial x}, \qquad (6.78)$$

запишем выражения для составляющих h_y в 1-й и 2-й областях следующимобразом

$$h_y^{(1)} = \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon^{(1)}}{\chi_1^2}\sum_{m=1}^{\infty}\chi_{xm}^{(1)}A_m^{(1)}\cos\left[\chi_{xm}^{(1)}(x_2 - x)\right]\sin\frac{m\pi y}{y_1},$$
$$h_y^{(2)} = \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon^{(2)}}{\chi_2^2}\sum_{m=1}^{\infty}\chi_{xm}^{(2)}A_m^{(2)}\cos\left[\chi_{xm}^{(2)}x\right]\sin\frac{m\pi y}{y_2}. \qquad (6.79)$$

Учтем теперь граничные условия при $x = x_1$

$$h_y^{(1)} = h_y^{(2)} \text{ при } y \in [0, y_1]. \qquad (6.80)$$

Подставляя разложение (6.79) в граничное условие (6.80) с учетом выражений для коэффициентов $A_m^{(1)}$, $A_m^{(2)}$ (6.77), получим *интегральное уравнение первого рода* относительно неизвестной функции $f_z(y)$

$$\int_0^{y_1} f_z(y')K_1(y, y')\,dy' = 0, \qquad (6.81)$$

$$K_1(y, y') = \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{\varepsilon^{(2)}\chi_{xm}^{(2)}}{y_2\chi_2^2}ctg\left[\chi_{xm}^{(2)}x_1\right]\sin\frac{m\pi y'}{y_2}\sin\frac{m\pi y}{y_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon^{(1)}\chi_{xm}^{(1)}}{y_1\chi_1^2}ctg\left[\chi_{xm}^{(1)}(x_2 - x_1)\right]\sin\frac{m\pi y'}{y_1}\sin\frac{m\pi y}{y_1}\right\}.$$

Обратившись к п.п. 6.1.4, устанавливаем, что ядро $K_1(y, y')$ фактически является функцией Грина. Для улучшения сходимости ряда в функции $K_1(y, y')$ перейдем от функции $f_z(y)$ к ее производной $f_z'(y) = df_z(y)/dy$ с помощью соотношений $(i = 1, 2)$:

$$\int_0^{y_1} f_z(y')\sin\frac{m\pi y'}{y_i}\,dy' = \frac{y_i}{m\pi}\int_0^{y_1} f_z'(y')\cos\frac{m\pi y'}{y_i}\,dy',$$

которые следуют из формулы интегрирования по частям ($f_z(y) = 0$ при $y = 0, y_1$).

Тогда вместо интегрального уравнения (6.81) имеем

$$\int_0^{y_1} f_z'(y')K_2(y, y')\,dy' = 0, \qquad (6.82)$$

$$K_2(y, y') = \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{\varepsilon^{(2)}\chi_{xm}^{(2)}}{m\chi_2^2}ctg\left[\chi_{xm}^{(2)}x_1\right]\cos\frac{m\pi y'}{y_2}\sin\frac{m\pi y}{y_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon^{(1)}\chi_{xm}^{(1)}}{m\chi_1^2}ctg\left[\chi_{xm}^{(1)}(x_2 - x_1)\right]\cos\frac{m\pi y'}{y_1}\sin\frac{m\pi y}{y_1}\right\}.$$

Соотношение (6.82) является *сингулярным интегральным уравнением* относительно $f_z'(y)$ с ядром, имеющим особенность типа Коши (см. п.п. 6.3.2). Действительно, рассмотрим асимптотическое поведение рядов при $m \to \infty$. Так как при $m \to \infty$ $(k = 1, 2)$

$$\lim_{m\to\infty}\chi_{xm}^{(k)} = i\frac{m\pi}{y_k}, \qquad \lim_{m\to\infty}ctg\left(\chi_{xm}^{(k)}x_k\right) = -i,$$

то функцию Грина $K_2(y, y')$ в (6.82) можно заменить на ее асимптотический ряд

$$K_2^{\infty}(y,y') = -i\pi\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{\varepsilon^{(2)}}{y_2\chi_2^2}\cos\frac{m\pi y'}{y_2}\sin\frac{m\pi y}{y_2} + \frac{\varepsilon^{(1)}}{y_1\chi_1^2}\cos\frac{m\pi y'}{y_1}\sin\frac{m\pi y}{y_1}\right\}. \quad (6.83)$$

С учетом известного соотношения

$$\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{m\pi y'}{y_i}\sin\frac{m\pi y}{y_i} = \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi y/y_i)}{\cos(\pi y/y_i)-\cos(\pi y'/y_i)}$$

ядро интегрального уравнения (6.82) имеет особенность типа Коши.

Уравнение (6.82) можно решать различными способами, например, используя метод Галеркина (п. 1.2, 2.1), согласно которому неизвестную функция $f_z'(y)$ представляется в виде разложения по некоторому базису $\{\Phi_n(y)\}$:

$$f_z'(y) = \sum_{n=1}^{N} C_n\Phi_n(y), \quad (6.84)$$

где C_n – неизвестные постоянные, а базисные функции для улучшения сходимости (6.84) должны учитывать поведение поля вблизи ребра (выступа) (п.п. 2.2.3), т.е. в соответствии с п.п. 1.3.4, 6.3.2 $\Phi_n(y)$ следует выбирать в классе функций $\Phi_n(y) = \sigma^{-1}(y)\varphi_n(y)$, где $\{\varphi_n(y)\}$ – полная и ортогональная на $[0, y_1]$ с весом $\sigma(y)$ система функций, удовлетворяющая граничным условиям при $y = 0$. В зависимости от типа ребра (прямой угол, полуплоскость) в соответствии с п.п. 2.2.3 в качестве базисных функций используются полиномы Гегенбауэра, полиномы Чебышева, произведение тригонометрических функций на сомножитель, учитывающий особенности на ребре, и т.п. Все определяется сложностью вычисления элементов и затратами машинного времени.

После подстановки (6.84) в интегральное уравнение (6.82) и использования стандартной процедуры Галеркина получаем однородную СЛАУ из N уравнений для нахождения коэффициентов C_n. Условием нетривиального решения системы является равенство нулю определителя этой системы, откуда, учитывая (6.76), получим *дисперсионное уравнение* (γ/k_0 в функции частоты). Опустив одно из уравнений системы и сделав необходимые преобразования, приходим к неоднородной СЛАУ, из которой находим значения неизвестных коэффициентов C_n с точностью до постоянного множителя. Используя выражения (6.77), (6.79) и (1.52), находим поле соответствующей E-волны.

Если суммирование по m в ядре (6.83) интегрального уравнения (6.82) ограничить некоторым числом M, то получим уравнение, для ко-

торого характерно явление относительной сходимости. Более строгий подход к решению – это сведение СИУ к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода путем выделения логарифмических особенностей или сингулярностей типа Коши в ядрах уравнений и последующей процедуры обращения (нахождения решения) уравнения [4, 5, 15].

6.8. Определение поля излучения (рассеяния) в дальней зоне по известным значениям полей, рассчитанным в ближней зоне

Для многих практических задач при использование МКЭ или МКРВО требуется знание излученного (рассеянного) поля в дальней зоне моделируемого объекта ($|\mathbf{R}| > 2D^2/\lambda_{\min}$, где D – размер моделируемого объекта; $\lambda_{\min}$ – минимальная длина волны в спектре сигнала). Задание области моделирования вплоть до дальней зоны представляется неоправданным, поскольку из-за больших размеров области требует существенных вычислительных ресурсов. Поэтому процедуру определения поля излучения (рассеяния) в дальней зоне разбивают на два этапа. На первом этапе при решении электродинамических задач излучения антенн или рассеяния, используя МКЭ или МКРВО, находят тангенциальные составляющими электрического $\mathbf{E}_\tau$ и магнитного $\mathbf{H}_\tau$ векторов на виртуальной поверхности $S_{\text{тр}}$ (поверхности трансформации) в ближней зоне области решения (рис. 6.6).

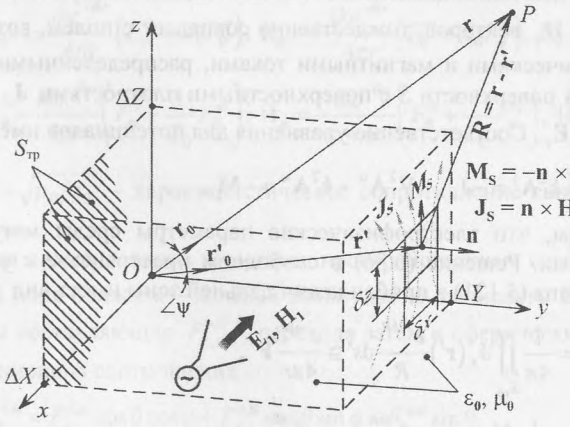


Рис. 6.6. К определению поля в дальней зоне по известным значениям поля в ближней зоне

На втором этапе осуществляют преобразование (трансформацию) поля с виртуальной поверхности $S_{тр}$ в дальнюю зону, при этом возможны два подхода трансформации: *в частотной и временной областях*. Если необходима информация в широкой полосе частот для некоторых пространственных углов целесообразно использовать временную трансформацию, если же в широком диапазоне пространственных углов, но узком частотном диапазоне – то частотную трансформацию.

6.8.1. Частотный подход

Из основного курса электродинамики [11–14] известно, что для решения уравнений Максвелла (1.11), (1.13) в случае однородной среды вводят два вспомогательных векторных поля: векторный потенциал электрических токов $\mathbf{A}^{э}$ и векторный потенциал магнитных токов $\mathbf{A}^{м}$. Векторы напряженности полей определяются через эти потенциалы так (см. п.п. 1.4.4):

$$\mathbf{E}=\frac{1}{i\omega\varepsilon_a}\left[\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}^{э}\right)+k^2\mathbf{A}^{э}\right]-\nabla\times\mathbf{A}^{м},$$
$$\mathbf{H}=\frac{1}{i\omega\mu_a}\left[\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}^{м}\right)+k^2\mathbf{A}^{м}\right]+\nabla\times\mathbf{A}^{э}, \qquad (6.85)$$

а сами потенциалы удовлетворяют векторным неоднородным уравнениям Гельмгольца с возбуждающими электрическим **J** и магнитным **M** токами. В силу теоремы эквивалентности (см. п.п. 1.3.3) поле **E**, **H** во внешней области, ограниченной геометрической поверхностью S с заданными на ней тангенциальными составляющими электрического $\mathbf{E}_\tau$ и магнитного $\mathbf{H}_\tau$ векторов, тождественно совпадает с полем, возбуждаемым электрическими и магнитными токами, распределенными на геометрической поверхности S с поверхностными плотностями $\mathbf{J}_S=\mathbf{n}\times\mathbf{H}_\tau$ и $\mathbf{M}_S=-\mathbf{n}\times\mathbf{E}_\tau$. Соответственно уравнения для потенциалов имеют вид

$$\nabla^2\mathbf{A}^{э}+k^2\mathbf{A}^{э}=-\mathbf{J}_s,\quad \nabla^2\mathbf{A}^{м}+k^2\mathbf{A}^{м}=-\mathbf{M}_s, \qquad (6.86)$$

Заметим, что электрофизические параметры среды могут быть комплексными. Решение (6.86) в свободном пространстве с условием излучения типа (5.121) в приближении дальней зоны имеет вид

$$\mathbf{A}^{э}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_{тр}}\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')\frac{e^{-ikR}}{R}\mathrm{d}s'\cong\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\mathbf{F}^{э}, \qquad (6.87)$$

$$\mathbf{A}^{м}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_{тр}}\mathbf{M}_s(\mathbf{r}')\frac{e^{-ikR}}{R}\mathrm{d}s'\cong\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}\mathbf{F}^{м}. \qquad (6.88)$$

Здесь

$$\mathbf{F}^{э}=\iint\limits_{S_{тр}}\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')e^{ikr'\cos\psi}\mathrm{d}s',\quad \mathbf{F}^{м}=\iint\limits_{S_{тр}}\mathbf{M}_s(\mathbf{r}')e^{ikr'\cos\psi}\mathrm{d}s', \qquad (6.89)$$

где $e^{-ikR}/4\pi R$ – трехмерная функция Грина свободного пространства; $\mathbf{r}=r\mathbf{r}_0$ – вектор точки наблюдения (x,y,z); $\mathbf{r}'=r'\mathbf{r}_0'$ – вектор точки интегрирования на $S_{mp}(x',y',z')$; $\mathbf{R}=R\mathbf{R_0}\equiv|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$; ψ – угол между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$; расстояние R в приближении дальней зоны равно $R=\left[r^2+(r')^2-2rr'\cos\psi\right]^{1/2}\cong r-r'\cos\psi$ –при аппроксимации фазы, $R\cong r$ – при аппроксимации амплитуды. Для разности хода можно получить явное выражение, представив в виде скалярного произведения, $r'\cos\psi=r'|\mathbf{r}_0|\cos\psi=\mathbf{r}'\mathbf{r}=x'\sin\theta\cos\varphi+y'\sin\theta\sin\varphi+z'\cos\theta$.

Как следует из (6.85)–(6.89), данные функции зависят только от угловых координат точки наблюдения и не зависят от расстояния r. Для перехода от векторных потенциалов $\mathbf{F}^{э,м}$ к векторам поля **E** и **H** в дальней зоне необходимо выполнить операции пространственного дифференцирования, предписываемые соотношениями (6.85). После тождественных преобразований, а также отбрасывания членов, имеющих радиальную зависимость $1/r^2$ (или $1/r^3$), т.е. несущественных в дальней зоне, получаем соотношения для компонент векторов поля в сферической системе координат

$$\mathrm{E}_\theta=-\frac{ike^{-ikr}}{4\pi r}\left(F_\varphi^{м}+Z_0F_\theta^{э}\right),\ \mathrm{E}_\varphi=+\frac{ike^{-ikr}}{4\pi r}\left(F_\theta^{м}-Z_0F_\varphi^{э}\right),\ \mathrm{E}_r=0, \qquad (6.90а)$$

$$\mathrm{H}_\theta=\frac{ike^{-ikr}}{4\pi r}\left(F_\varphi^{э}-\frac{1}{Z_0}F_\theta^{м}\right),\ \mathrm{H}_\varphi=-\frac{ike^{-ikr}}{4\pi r}\left(F_\theta^{э}+\frac{1}{Z_0}F_\varphi^{м}\right),\ \mathrm{H}_r=0, \qquad (6.90б)$$

где $Z_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ – характеристическое сопротивление свободного пространства.

Для прямоугольной геометрии пространственных сеток и преобразования поля ближняя – дальняя зоны удобно вычислять $\mathbf{F}^{э,м}$ через декартовы составляющие $F_{x,y,z}^{э,м}$, переходя затем к сферическим координатам с помощью соотношения

$$F_\theta^{э,м}=F_x^{э,м}\cos\theta\cos\varphi+F_y^{э,м}\cos\theta\sin\varphi-F_z^{э,м}\sin\theta,$$
$$F_\varphi^{э,м}=-F_x^{э,м}\sin\varphi+F_y^{э,м}\cos\varphi. \qquad (6.91)$$

Тогда из (6.87), (6.88) имеем

$$F_\theta^э = \iint\limits_{S_{тр}} \left(J_{sx}\cos\theta\cos\varphi + J_{sy}\cos\theta\sin\varphi - J_{sz}\sin\theta\right)e^{ikr'\cos\psi}\mathrm{d}s',$$

$$F_\varphi^э = \iint\limits_{S_{тр}} \left(-J_{sx}\sin\varphi + J_{sy}\cos\varphi\right)e^{ikr'\cos\psi}\mathrm{d}s', \qquad (6.92а)$$

$$F_\theta^м = \iint\limits_{S_{тр}} \left(\mathrm{M}_{sx}\cos\theta\cos\varphi + \mathrm{M}_{sy}\cos\theta\sin\varphi - \mathrm{M}_{sz}\sin\theta\right)e^{ikr'\cos\psi}\mathrm{d}s',$$

$$F_\varphi^м = \iint\limits_{S_{тр}} \left(-\mathrm{M}_{sx}\sin\varphi + \mathrm{M}_{sy}\cos\varphi\right)e^{ikr'\cos\psi}\mathrm{d}s'. \qquad (6.92б)$$

При известном распределении векторных значений плотностей электрического и магнитного токов $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')$, $\mathbf{M}_s(\mathbf{r}')$ на поверхности $S_{тр}$ (см. рис. 6.6) интегральные представления (6.92) могут быть найдены численно с учетом размещения и ориентации каждой из граней поверхности $S_{тр}$ прямоугольной области решения размером $2\Delta X, 2\Delta Y, 2\Delta Z$. Такую область можно разбить на три пары граней. Например, $x' = \pm\Delta X$, на которых известными являются J_{sy}, J_{sz} и $\mathrm{M}_{sy}, \mathrm{M}_{sz}$, фазовый множитель в (6.92) определяется с учетом $r'\cos\psi = \mathbf{r}'\mathbf{r}_0 = \pm\Delta X\sin\theta\cos\varphi + y'\sin\theta\sin\varphi + z'\cos\theta$, а интегрирование ограничено условиями $-\Delta Y \le y \le \Delta Y$, $-\Delta Z \le z \le \Delta Z$, $\mathrm{d}s' = \mathrm{d}y'\mathrm{d}z'$. Аналогично получаем для других граней. Определив $F_\theta^{э,м}$ и $F_\varphi^{э,м}$, можно найти угловое распределение составляющих вектора $\mathbf{E}$ в дальней зоне, характеризуемое зависимостью $F_{\theta,\varphi}$ от угловых координат θ, φ. Графическое представление этой зависимости называется *диаграммой направленности* (амплитудная, фазовая, поляризационная). Нормированная амплитудная диаграмма направленности для θ-й и φ-й компонент определяются по формулам

$$\Phi_\theta(\theta,\varphi) = \frac{\left|\mathrm{E}_\theta(\theta,\varphi)\right|}{\left|\mathrm{E}_\theta\right|_{\max}}; \quad \Phi_\varphi(\theta,\varphi) = \frac{\left|\mathrm{E}_\varphi(\theta,\varphi)\right|}{\left|\mathrm{E}_\varphi\right|_{\max}}. \qquad (6.93)$$

Вычислив среднее значение вектора Пойнтинга

$$\mathbf{\Pi}_{ср} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}\times\overset{*}{\mathbf{H}}\right] = \left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{E}_\theta\overset{*}{\mathrm{H}}_\varphi\right) + \frac{1}{2}\left(-\mathrm{E}_\varphi\overset{*}{\mathrm{H}}_\theta\right)\right]\mathbf{r}_0 =$$

$$= \mathbf{r}_0\frac{k^2}{32\pi^2 Z_0 r^2}\left(\left|F_\varphi^м + Z_0F_\theta^э\right|^2 + \left|F_\theta^м - Z_0F_\varphi^э\right|^2\right), \qquad (6.94)$$

запишем нормированную диаграмму направленности по мощности

$$\Phi^2(\theta,\varphi) = \frac{\left|\mathbf{\Pi}_{ср}(\theta,\varphi)\right|}{\left|\mathbf{\Pi}_{ср}\right|_{\max}}. \qquad (6.95)$$

Формула (6.94) является основой для вычисления коэффициента направленного действия антенн или эффективной поверхности рассеяния различных тел.

6.8.2. Временной подход

Для определения поля рассеяния (излучения) в дальней зоне по известным значениям полей, рассчитанных в ближней зоне с помощью МКРВО, вновь обратимся к (6.90а), сделав замену $k = 2\pi/\lambda_0$:

$$\mathrm{E}_\theta = -\frac{ie^{-ikr}}{2\lambda_0 r}\left(F_\varphi^м + Z_0F_\theta^э\right), \quad \mathrm{E}_\varphi = +\frac{ie^{-ikr}}{2\lambda_0 r}\left(F_\theta^м - Z_0F_\varphi^э\right), \qquad (6.96)$$

и вводя обозначения

$$\mathbf{W} = -\frac{ie^{-ikr}}{2\lambda_0 r}\mathbf{F}^э, \quad \mathbf{U} = \frac{ie^{-ikr}}{2\lambda_0 r}\mathbf{F}^м, \qquad (6.97)$$

перепишем (6.96)

$$\mathrm{E}_\theta = -Z_0W_\theta - U_\varphi, \quad \mathrm{E}_\varphi = -Z_0W_\varphi + U_\theta. \qquad (6.98)$$

Применим Фурье-преобразование к (6.97), используя определение $\mathbf{F}^{э,м}$ (6.89)

$$\mathbf{W}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi rc}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{тр}}\mathbf{J}_s\left(t - \frac{r - \mathbf{r}'\mathbf{r}_0}{c}\right)\mathrm{d}s',$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi rc}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{тр}}\mathbf{M}_s\left(t - \frac{r - \mathbf{r}'\mathbf{r}_0}{c}\right)\mathrm{d}s', \qquad (6.99)$$

окончательно получаем

$$\mathrm{E}_\theta(\mathbf{r},t) = -Z_0W_\theta(\mathbf{r},t) - U_\varphi(\mathbf{r},t),$$

$$\mathrm{E}_\varphi(\mathbf{r},t) = -Z_0W_\varphi(\mathbf{r},t) + U_\theta(\mathbf{r},t). \qquad (6.100)$$

Формулы (6.99), (6.100) являются основными для определения поля рассеяния (излучения) во временной области в дальней зоне по известным значениям полей, рассчитанных в ближней зоне. Аргумент $\mathbf{J}_s$ и $\mathbf{M}_s$ в (6.99) содержит временную задержку $\tau_з = (r - \mathbf{r}'\mathbf{r}_0)/c$ между по-

явлением полей (токов) на виртуальной поверхности $S_{\text{тр}}$ и временем распространения волны от точки на поверхности $S_{\text{тр}}$ до точки наблюдения в дальней зоне (см. рис. 6.6).

Остановимся на использовании выражений (6.99), (6.100) как логического продолжения МКРВО, с помощью которого найдены $\mathbf{J}_s$ и $\mathbf{M}_s$. Полная стратегия состоит в вычислении интегралов в (6.99) со всех шести граней поверхности $S_{\text{тр}}$ (рис. 6.6) на каждом временном шаге. В результате в прямоугольной системе координат находятся изменения компонент **W** и **U** от каждой ячейки граней и на каждом временном шаге с учетом соответствующей задержки $\tau_з$. Проиллюстрируем основную идею сказанного на простейшем примере. Пусть на грани $y=+\Delta Y$ в ячейке размером $\delta x\delta z$, определяемой радиус-вектором $\mathbf{r}'=x'\mathbf{x}_0+\Delta Y\mathbf{x}_0+z'\mathbf{z}_0$, задано распределение магнитного тока $\mathbf{M}_S=-\mathbf{n}\times\mathbf{E}_\tau$ (рис. 6.6):

$$\mathrm{M}_z\mathbf{z}_0=-\mathbf{y}_0\times\mathrm{E}_x\mathbf{x}_0=\mathrm{E}_x\mathbf{z}_0. \tag{6.101}$$

Тогда в соответствие с выражением (6.99) имеем

$$\Delta\mathbf{U}(\mathbf{r},t)=\Delta\mathbf{U}_z\mathbf{z}_0=\frac{1}{4\pi rc}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{M}_z\mathbf{z}_0\Delta x\Delta z\right)=\frac{\delta x\delta z}{4\pi rc}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{E}_x\mathbf{z}_0\right), \tag{6.102}$$

при этом временная задержка $\tau_з$ вносится в $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$ в виде дробного числа временных отсчетов $\chi=\tau_з/c\Delta t=\left(r-\mathbf{r}'\mathbf{r}_0\right)/c\Delta t$ с возможностью соответствующей интерполяции. Для стандартной схемы и обозначений КРВО с использованием (6.102) значение U_z на $(n+1/2)$ временном шаге с учетом временной задержки можно представить в виде

$$U_z\big|_{\mathbf{r}}^{n+1/2+\chi}=U_z\big|_{\mathbf{r}}^{n+1/2+\chi}+\frac{\delta x\delta z}{4\pi rc\Delta t}\left(\mathrm{E}_x\big|_{\mathbf{r}'}^{n+1}-\mathrm{E}_x\big|_{\mathbf{r}'}^{n}\right). \tag{6.103}$$

Применение формулы (6.103) для всех ячеек поверхности $S_{\text{тр}}$ для каждого временного шага МКРВО позволяет вычислить векторный потенциал $U_z(\mathbf{r},t)$, далее перейти к сферическим компонентам (6.91) и определить временную форму векторов электромагнитного поля (6.100) в произвольной точке пространства в дальней зоне. Отметим, что в общем случае распределения электрических и магнитных токов на шести гранях ограничивающей область решения поверхности $S_{\text{тр}}$ при значительном числе временных шагов требуется сохранение большого массива данных.

6.9. Гибридные электродинамические методы

В п. 1.6 были частично обсуждены достоинства и недостатки, присущие рассмотренным выше численным методам. Желание использовать сильные стороны разных вычислительных процедур привело к созданию гибридных методов и использованию асимптотических приближений. Этим делается существенный шаг к решению задач, когда рассматриваемый объект слишком велик (в терминах длин волн), чтобы его моделировать с помощью ММ, МКЭ или КРВО, но слишком мал, чтобы применять только асимптотические методы. Рассмотрим схему применения гибридного подхода на примере метода моментов – физической оптики (ММ – ФО) при решении интегрального уравнения для определения рассеянного электромагнитного поля металлическими телами, возбуждаемыми сторонними электрическими токами.

6.9.1. Основные соотношения гибридного метода моментов – физической оптики

Гибридный ММ – ФО [34, 35, 38] предназначен для моделирования сложных структур большой размерности, при этом ММ, требующий существенных вычислительных затрат (но достаточно строгий), используется для моделирования резонансных объектов структуры, а метод физической оптики – для моделирования объектов структуры большой размерности.

Метод физической оптики основан на принципе Гюйгенса–Френеля и его математической формулировке – интеграле Кирхгофа. Так, например, если поверхность *S* совпадает с поверхностью идеально проводящего тела, то на освещенной части *S* поверхностный электрический ток берут такой же, как в случае возбуждения бесконечной идеально проводящей плоскости, касательной к поверхности тела в данной точке, т.е. полагают $\mathbf{J}_S=2\left[\mathbf{n},\mathbf{H}^{\text{вн}}\right]$, а на теневой поверхности ток принимают равным нулю.

Отметим особенности метода, ухудшающие точность моделирования:

– непрерывный резкий переход от освещенной части поверхности к затемненной;

– кривизной поверхности пренебрегают;

– плохо моделируются поверхности, имеющие ребра, вершины и иные «резкие» неоднородности.

Основой для рассматриваемого гибридного метода являются интегральные уравнения электрического и магнитного типов относительно неизвестной поверхностной плотности электрического тока $\mathbf{J}_s(\mathbf{r})$ на поверхности идеально проводящего тела S_0 (см. п. 6.6 и рис. 6.4).

Интегральное уравнение магнитного типа относительно $\mathbf{J}_s(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}) = 2\mathbf{n}\times\mathbf{H}^{\text{вн}}(\mathbf{r}) + \mathbf{L}_J^{\text{H}}\{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')\}, \quad \mathbf{r},\mathbf{r}'\in S_0, \tag{6.104}$$

где

$$\mathbf{L}_J^{\text{H}}\{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')\} = \frac{1}{2\pi}\oint_{S_0}\left(\mathbf{n}\times(...)\times\nabla'\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)ds' \tag{6.105}$$

– магнитный линейный интегрально-дифференциальный оператор; $k=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$; $\mathbf{H}^{\text{вн}}(\mathbf{r})$ – внешнее магнитное поле заданных токов в отсутствие идеально проводящего тела; $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль по отношению к S_0. Если пренебречь интегральным членом, то получим аппроксимацию $\mathbf{J}_S^{\text{ФО}} = 2\left[\mathbf{n},\mathbf{H}^{\text{вн}}\right]$ в приближении метода физической оптики. В ядре уравнения исключена сингулярная точка при $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$, поэтому для выражения (6.104) применима вся теория интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для численного решения последних обычно применяют методы сведения к решению СЛАУ [26, 27]. В уравнении (6.104) интеграл представляет собой рассеянное объектом магнитное поле, которое вычисляется после нахождения тока $\mathbf{J}_s(\mathbf{r})$ путем решения интегрального уравнения.

Уравнение электрического типа – это интегральное уравнение первого рода относительно $\mathbf{J}_S(\mathbf{r})$ на поверхности тела, и для получения устойчивого решения требует специального алгоритма решения:

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}^{\text{вн}}(\mathbf{r}) = \mathbf{L}_J^{\text{E}}\{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')\}, \quad \mathbf{r},\mathbf{r}'\in S_0, \tag{6.106}$$

где

$$\mathbf{L}_J^{\text{E}}\{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')\} = \mathbf{n}\times\oint_{S_0}\left\{ik\eta(...)G + \frac{\eta}{ik}[\nabla'\cdot(...)]\nabla' G\right\}ds' \tag{6.107}$$

– электрический линейный интегрально-дифференциальный оператор; $\eta=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$; $\mathbf{E}^{\text{вн}}(\mathbf{r})$ – электрическое поле заданных токов в отсутствие идеально проводящего тела.

Запишем в операторном виде рассеянные поля в уравнениях (6.104) и (6.106):

$$\mathbf{H}_S = \mathbf{L}_J^{\text{H}}(\mathbf{J}_S^{\text{MM}}) + \mathbf{L}_J^{\text{H}}(\mathbf{J}_S^{\text{ФО}}), \quad \mathbf{E}_S = \mathbf{L}_J^{\text{E}}(\mathbf{J}_S^{\text{MM}}) + \mathbf{L}_J^{\text{E}}(\mathbf{J}_S^{\text{ФО}}), \tag{6.108}$$
$$S_0 = S_{\text{MM}} + S_{\text{ФО}},$$

где $\mathbf{J}_S^{MM}$, $\mathbf{J}_S^{ФО}$ – токи в области V_0, определяемые на поверхности S_{MM} с помощью ММ, а на поверхности $S_{\text{ФО}}$ – методом физической оптики.

В соответствии с ММ – ФО решение для токов в (6.104) и (6.106) на проводящей поверхности S_{MM} ищется в виде

$$\mathbf{J}_S^{\text{MM}} = \sum_{n=1}^{N^{\text{MM}}}\alpha_n\mathbf{f}_n, \tag{6.109}$$

где α_n – неизвестные константы; $\mathbf{f}_n$ – базисные векторные функции.

При этом проводящая поверхность S_{MM}, как правило, разбивается на треугольные элементы, а в качестве аппроксимирующих распределение вектора плотности поверхностного электрического тока векторных базисных функций $\mathbf{f}_n$ используются так называемые RWG-функции [34, 35] (см. п.п. 6.9.2).

Используем для нахождения $\mathbf{J}_S^{\text{MM}}$ с помощью ММ интегральное уравнение для электрического поля (6.106). Подставляя равенство (6.109) в (6.106), на проводящей поверхности S_{MM} получаем

$$\mathbf{E}_\tau^{\text{вн}} = \mathbf{L}_J^{\text{E}}(\mathbf{J}_S^{\text{MM}}) = \sum_{n=1}^{N^{\text{MM}}}\alpha_n(\mathbf{L}_J^{\text{E}}\mathbf{f}_n)_\tau. \tag{6.110}$$

Далее уравнение (6.110) решается относительно коэффициентов α_n методами невязки, коллокаций или иным способом (см. например, п.п. 2.2.1), после чего ток $\mathbf{J}_S^{\text{MM}}$ определен в (6.109). Этот ток создает в каждой точке пространства, включая поверхность $S_{\text{ФО}}$, дополнительно к внешнему рассеянное магнитное поле (см. запись (6.60)) $\mathbf{H}^{\text{рас}} = \mathbf{L}_J^{\text{H}}(\mathbf{J}_S^{\text{MM}})$. Соответственно, наводимый на поверхность $S_{\text{ФО}}$ ток $\mathbf{J}_S^{\text{ФО}}$ должен удовлетворяет интегральному уравнению типа (6.104) для магнитного поля, в котором $\mathbf{H}^{\text{вн}}$ заменено на полное магнитное поле $\left(\mathbf{H}^{\text{вн}}+\mathbf{H}^{\text{рас}}\right)$. Формально в соответствии с ММ решение для токов на проводящей поверхности $S_{\text{ФО}}$ ищется аналогично выражению (6.109) в виде

$$\mathbf{J}_S^{\text{ФО}} = \sum_{n=N^{\text{MM}}+1}^{N^{\text{ФО}}}\beta_n\mathbf{f}_n, \tag{6.111}$$

где β_n – неизвестные константы.

Однако при использовании приближения физической оптики полностью пренебрегают эффектом взаимодействия, описываемым инте-

гральным членом уравнения (6.104) на освещенной части поверхности рассеивателя $S_{\text{ФО}}$, и предполагают, что в области тени взаимная интерференция полностью гасит падающее поле. Тогда неизвестные константы β_n в равенстве (6.111) можно считать известными в терминах коэффициентов α_n, поскольку $\mathbf{H}^{\text{рас}} = \mathbf{L}_J^{\text{H}}(\mathbf{J}_S^{\text{MM}})$:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_S^{\text{ФО}}(\mathbf{r}) = 2\mathbf{n}\times\mathbf{H}^{\text{вн}}(\mathbf{r}) + \sum\limits_{n=1}^{N^{\text{MM}}} 2\alpha_n \mathbf{n}\times\mathbf{L}_J^{\text{H}}(\mathbf{f}_n) & \text{в освещенной области;} \\ \mathbf{J}_S^{\text{ФО}}(\mathbf{r}) = 0 & \text{в зоне тени.} \end{cases} \quad (6.112)$$

Метод ФО позволяет найти ток на поверхности $S_{\text{ФО}}$ в замкнутом виде. Если ток $\mathbf{J}_S^{\text{ФО}}$ на поверхности $S_{\text{ФО}}$ включен в решение $\mathbf{J}_S^{\text{MM}}$ (6.110), то это уравнение в области ММ можно записать как

$$\mathbf{E}_\tau^{\text{вн}} = \mathbf{L}_J^{\text{E}}(\mathbf{J}_S^{\text{MM}}) + \mathbf{L}_J^{\text{E}}(\mathbf{J}_S^{\text{ФО}}). \quad (6.113)$$

Отметим, что при этом потребуется некоторая итеративная процедура для согласования граничных условий на поверхностях $S_{\text{ММ}}$, $S_{\text{ФО}}$. Наиболее трудоемкими этапами вычисления поверхностного тока являются определение элементов матрицы и решение матричного уравнения. Проведенное рассмотрение позволяет выделить два возможные подходы к использованию гибридного ММ – ФО.

1. Определяется ток $\mathbf{J}_S^{\text{MM}}$ на поверхности $S_{\text{ММ}}$ в соответствии с уравнениями (6.109), (6.110), а затем вычисляется $\mathbf{J}_S^{\text{ФО}}$ с использованием соотношения (6.112). Такой подход целесообразен, когда области ММ и физической оптики разделены. Наглядным примером является гибридная зеркальная антенна – структура, состоящая из зеркального отражателя и облучателя в виде АР. Облучатель рассчитывается с помощью ММ, а зеркало– используя метод физической оптики.

2. Ток $\mathbf{J}_S^{\text{ФО}}$ в области физической оптики вносит вклад в область ММ, при этом решается задача (6.113) относительно $\mathbf{J}_S^{\text{MM}}$, а влияние $\mathbf{J}_S^{\text{ФО}}$ может быть учтено в замкнутой форме через $\mathbf{J}_S^{\text{MM}}$.

Основным недостатком приближения физической оптики является разрыв плотности тока на границе между освещенной областью и областью тени, что может послужить причиной существенных ошибок. Типичными способами обхода этой трудности является использование приближения, при котором ток на освещенной части поверхности рассеивателя берется в виде выражения (6.112), а ток на затененной части поверхности находится из интегрального уравнения.

6.9.2. К выбору базисных и проекционных функций

В течение многих лет ММ для решения рассматриваемой задачи применялся в упрощенной двумерной постановке. Это обусловлено тем, что при аппроксимации решений трехмерных векторных задач традиционными скалярными функциями возникают серьезные осложнения. Во-первых, достаточно сложно накладывать условия на проводящей поверхности, а также в угловых областях, где проявляются сингулярные особенности поля. Во-вторых, при аппроксимации поверхностных токов традиционными функциями накладывается условие непрерывности полей, но не их производных, что приводит к появлению решений, не отвечающих физическому смыслу задачи. Эти решения называются ложными, поскольку не удовлетворяют условиям непрерывности поверхностных токов $\nabla_S \cdot \mathbf{J} = -i\omega\rho$. Появление ложных решений пытаются устранить различными способами, однако это существенно усложняет процедуру получения решения. При использовании ММ ключевым этапом является выбор векторных базисных и проекционных функций. Видимо, нет абсолютных критериев качества при таком выборе.

Рассмотрим пример векторных базисных функций, полагая, что проводящая поверхность $S_0 = S_{\text{ММ}} + S_{\text{ФО}}$ разбита на треугольные (e)-элементы, а в качестве аппроксимирующих распределение вектора плотности поверхностного электрического тока векторных базисных функций $\mathbf{f}_n$ используются так называемые RWG-функции [34, 35]. Главной идеей использования таких базисных функций для аппроксимации является непрерывность нормальных компонент поверхностного тока на ребрах треугольных элементов, на которые разбита вся область анализа. Такой подход отвечает точности и устойчивости моделирования и требованиям к вычислительным ресурсам.

Векторные базисные RWG-функции определены на двух треугольных элементах T_n^+, T_n^-, имеющих общее ребро l_n, следующим образом (рис. 6.7):

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{l_n}{2\mathrm{A}_n^+}\boldsymbol{\rho}_n^+, & \mathbf{r}\in\mathrm{T}_n^+; \\ \dfrac{l_n}{2\mathrm{A}_n^-}\boldsymbol{\rho}_n^-, & \mathbf{r}\in\mathrm{T}_n^-; \\ 0, & \mathbf{r}\notin\mathrm{T}_n^+\cup\mathrm{T}_n^-, \end{cases} \quad (6.114)$$

где A_n^+, A_n^- – площади соответствующих треугольных элементов, $\boldsymbol{\rho}_n^+$, $\boldsymbol{\rho}_n^-$ – радиусы-векторы, определенные относительно n-вершины.

Положение точки в T_n^+, T_n^- определяется либо вектором $\mathbf{r}$, задаваемым относительно общей системы координат O, либо векторами $\boldsymbol{\rho}_n^+$, $\boldsymbol{\rho}_n^-$.

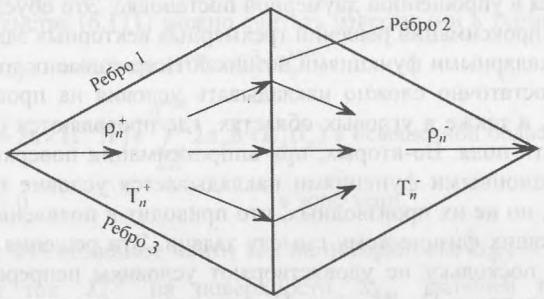


Рис. 6.7. К определению векторных базисных RWG-функций

Векторные базисные RWG-функции (поверхностный ток) обладают следующими свойствами, делающими их особенно привлекательными для аппроксимации распределения вектора плотности поверхностного электрического тока на проводящей поверхности:

1) аппроксимирующие функции (ток) не имеют нормальных компонент к границе (исключая общее ребро) поверхности, разбитой на пары треугольных элементов T_n^+, T_n^-, и, следовательно, не существует линейных зарядов вдоль этих границ;

2) компонента тока нормальная к общему n-ребру, постоянна и непрерывна поперек ребра и равна $\left(2A_n^{\pm}/l_n\right)$. Это означает, что вдоль этого ребра отсутствуют линейные заряды, а учитывая свойство 1, можно утверждать, что все ребра T_n^+, T_n^- свободны от линейных зарядов;

3) поверхностная дивергенция $\mathbf{f}_n$, пропорциональная поверхностной плотности зарядов на треугольных элементах T_n^+, T_n^-, равна

$$\nabla_S \cdot \mathbf{f}_n = \begin{cases} \dfrac{l_n}{A_n^+}, & \mathbf{r} \in T_n^+; \\ -\dfrac{l_n}{A_n^-}, & \mathbf{r} \in T_n^-; \\ 0, & \mathbf{r} \in T_n^+ \cup T_n^-. \end{cases} \qquad (6.115)$$

То есть поверхностная плотность зарядов постоянна в каждом треугольном элементе T_n^+, T_n^-, а полный заряд треугольной пары равен нулю. Поскольку базисные функции $\mathbf{f}_n$ определены для любого ребра треугольных элементов, то в отдельном элементе существуют три базисные функции, определяющие ток в каждом из элементов.

Итак, вектор плотности поверхностного электрического тока при решении интегрального уравнения , записанного в операторном виде, ищется в виде записи (6.109):

$$\mathbf{J}_S^{\text{MM}} = \mathbf{J}_S = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}), \qquad (6.116)$$

где $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$ определены в выражении (6.114), а N – число ребер поверхности, разбитой на треугольные элементы.

6.10. Пакеты программ для численного анализа электромагнитных полей методом моментов и гибридным методом

Широкое распространение получила программа MMANA [37] моделирования антенн, работающая в среде Windows. Программа ориентирована на антенны, электродинамическую модель которых можно представить в виде совокупности прямолинейных проводников, произвольным образом ориентированных в пространстве. Моделирование проводится на основе интегральных уравнений с помощью ММ (см. гл. 2) и при малых требованиях к вычислительным ресурсам обеспечивает расчет в 1024 сегментах. Программа позволяет:

– создавать и редактировать геометрию разных видов антенн;

– рассчитывать электромагнитное поле в ближней и дальней зонах;

– рассчитывать антенны, состоящие из проводников разных диаметров;

– оптимизировать антенну, используя различные критерии оптимизации;

– создавать файлы-таблицы и строить графики, характеризующие свойства антенны.

Существенное продвижение при моделировании на основе интегральных уравнений с помощью ММ реализовано в гибридной программе FEKO [38] (аббревиатура немецкой транскрипции, которая может быть переведена как Field Computation for Objects of Arbitrary Shape). Программа предназначена для решения широкого круга задач, связанных с проектированием СВЧ-устройств и антенн, рассеянием электромагнитных волн на сложных объектах, распространением радиоволн в городских условиях и т.д. Основу метода составляют интегральные формулировки соответствующих электродинамических задач и ММ их решения, включая различные варианты быстрых мультипольных методов.

Главной особенностью программы, отличающей ее от других, является использование гибридных методов, т.е. объединение в рамках решения единой задачи разных численных методов. В FEKO критические области структуры моделируются с использованием ММ, а для моделирования оставшихся больших (плоских криволинейных металлических поверхностей) применяют асимптотические методы: ММ–ФО, ММ – геометрической оптики (ММ–ГО), ММ – геометрической теории дифракции (ММ–ГТД), ММ – физической теории дифракции (ММ–ФТД).

Гибридный ММ–ФО, рассмотренный выше, использует ММ для моделирования резонансных объектов структуры, а метод физической оптики – для моделирования объектов структуры большой размерности. Если поверхность S совпадает с поверхностью идеально проводящего тела, то на освещенной части S поверхностный электрический ток берут такой же, как в случае возбуждения бесконечной идеально проводящей плоскости, касательной к поверхности тела в данной точке, а на теневой поверхности принимают ток равным нулю.

В гибридном ММ–ГО метод геометрической оптики используется для определения поля, отраженного от больших по сравнению с длиной волны объектов, которые имеют достаточно гладкую поверхность. Основная идея ГО состоит в предположении, что падающий луч (волна) отражается от рассеивателя в каждой точке как от плоскости.

В ММ–ГТД применяется геометрическая теория дифракции – один из наиболее эффективных методов асимптотического решения задач дифракции на телах сложной конфигурации, размеры которых велики по сравнению с длиной волны. Данная теория базируется на представлении рассеянной от проводящего тела волны (лучей) в виде суммы двух частей, полученных геометрической оптикой и дифрагированных (преломленных) лучей. Геометрическая оптика учитывает лучи, отраженные от гладких точек поверхности, а диффрагированные лучи (волны) – рассеянные поля на ребрах, вершинах, углах и касательных к поверхности точках. Амплитуды и фазы дифрагированных волн определяются из решения канонических задач дифракции на сфере, конусе, параболоиде и т.п.

В ММ–ФТД используется асимптотическая физическая теория дифракции, являющаяся развитием и уточнением метода физической оптики применительно к выпуклым металлическим телам, поверхность которых имеет изломы (ребра). В ФТД токи, наведенные на поверхности проводящего тела, складываются из равномерной части плотности тока $\mathbf{J}_S = 2\left[\mathbf{n}, \mathbf{H}^{\text{вн}}\right]$, и неравномерной. Последняя определяется краевыми волнами, амплитуды и фазы которых находятся на ребрах из решения канонических задач дифракции на идеально проводящем бесконечном двухгранном угле (клине), который образован плоскостями, касательными к поверхности тела в рассматриваемой точке ребра.

—— ГЛАВА 7 ——

Алгоритмы глобальной оптимизации

Методы глобальной оптимизации [39–43], которые также называют методами стохастической оптимизации, применяют для задач, имеющих множество возможных решений, зависящих от различных переменных, а результат – от сочетания этих переменных. Оптимизация сводится к поиску наилучшего решения задачи путем апробирования решений и сравнения их между собой для оценки качества. Обычно методы глобальной оптимизации применяют, когда число возможных решений слишком велико, перебрать их нельзя; оптимизируемая целевая функция (оптимизационный функционал) является невыпуклой и многопараметрической.

7.1. Генетический алгоритм

Процедуры оптимизации совместно с численными алгоритмами решения задачи электродинамики обеспечивают проектирование устройств с наилучшими по выбранному критерию параметрами.

7.1.1. Идея алгоритма

Генетический алгоритм представляет собой моделирование естественной эволюции биологических организмов, открытой Ч. Дарвином. Главный ее принцип заключается в том, что в процессе эволюции выживают особи, наиболее приспособленные к окружающей среде. Приспособленность зависит от набора хромосом данной особи. Они, в свою очередь, зависят от хромосом родителей, которые передали части своих хромосом потомку при скрещивании, а также от случайных факторов (мутаций). От набора хромосом зависит возможность особи произвести потомство, которое смогло бы выжить на протяжении следующих поколений. Плохо приспособленные особи либо вообще не смогут произвести потомство, либо их потомство окажется неконкурентоспособным по сравнению с другими особями.

7.1.2. Описание алгоритма

В отличие от многих других методов оптимизации, ГА работает одновременно со многими решениями (значениями оптимизируемой функции), что позволяет искать оптимальное решение сразу в нескольких точках поискового пространства. Решения (хромосомы) могут быть представлены в различных кодированных видах в зависимости от поставленной задачи, благодаря чему часто удается сократить объем оперативной памяти и ускорить расчет. На всех этапах алгоритма используются как детерминированные, так и вероятностные правила, благодаря чему алгоритм может выходить из локальных экстремумов. Например, в одной хромосоме возможно кодирование сразу нескольких параметров (генов), которые затем извлекаются, чтобы вычислить значение целевой функции.

Существует несколько способов кодирования решения в виде хромосом: как битовая строка (этот способ считается классическим), как дробные числа (для выполнения генетических операторов в некоторых языках программирования их можно преобразовывать в битовую строку), как коды Грея, а также возможно применение различных эвристических способов кодирования в зависимости от задачи.

При оптимизации функции в понятиях ГА каждая *особь* представляет собой конкретное решение задачи, в качестве *хромосом* выступают значения аргументов функции, а в качестве степени приспособленности – значение оптимизируемой функции (целевой функции). В случае поиска глобального максимума функции наибольшее значение целевой функции означает наилучшую степень приспособленности данной особи. В случае поиска глобального минимума, наилучшей степени приспособленности особи соответствует наименьшее значение целевой функции. Блок-схема ГА представлена на рис. 7.1.

Начальное заполнение популяции. На первом этапе происходит создание особей со случайным значением хромосом. Обязательное требование для этого этапа заключается в том, что начальная популяция должна быть достаточно разнообразной, иначе популяция особей быстро выродится к одному решению, не обязательно правильному, т.е. алгоритм «свалится» в локальный экстремум. В то же время чем больше размер популяции, тем дольше по времени будет выполняться одна итерация алгоритма.

Если известно приближенное решение задачи, то начальную популяцию рекомендуется заполнить особями со стартовым хорошим приближением. Это может как ускорить сходимость алгоритма, так и привести к вырождению популяции – потере разнообразия в генетическом фонде.

После создания популяции на следующих шагах алгоритма на особей осуществляется воздействие с помощью так называемых генетических операторов – скрещивания, мутации и отбора.



Рис. 7.1. Блок-схема генетического алгоритма

Выбор родителей для скрещивания. Выбор особей-родителей для последующего скрещивания может происходить несколькими способами. Например, выбирает заданное число наиболее приспособленных особей, т.е. с лучшими значениями оптимизируемой функции. Частным случаем при этом является способ, когда в скрещивании участвуют все особи, а партнер для скрещивания выбирается случайным образом. Надо отметить, что при использовании ГА в скрещивании могут участвовать два и более родителей. Другой способ выбора родителей заключается в том, что вероятность скрещивания конкретной особи пропорциональна значению оптимизируемой функции для этой особи.

Скрещивание. Скрещивание представляет собой получение новых особей (детей), у которых хромосомы создаются из участков хромосом родителей. Наиболее часто используемый алгоритм для получения новых хромосом от родителей состоит из двух этапов (рис. 7.2). На первом этапе случайным образом выбирается точка разбиения для хромосом. В общем случае, если используется N родителей для скрещивания, выбирается $N-1$ точка разбиения. Затем из полученных частей хромосом родителей (в случае двух родителей из четырех частей) создаются хромосомы для детей (в случае двух родителей – двух детей) таким образом, чтобы в каждую новую хромосому входили части хромосом каждого из родителя.

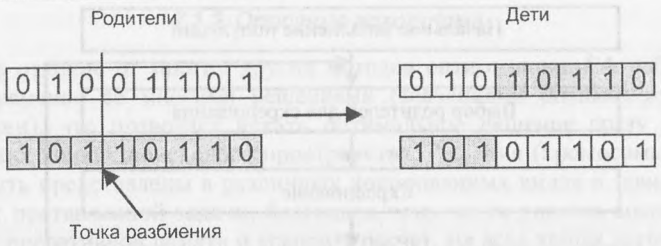


Рис. 7.2. Операция скрещивания с одной точкой разбиения

Существует алгоритм скрещивания, когда для двух родителей используется две или более точек разбиения. Пример такого скрещивания представлен на рис. 7.3.

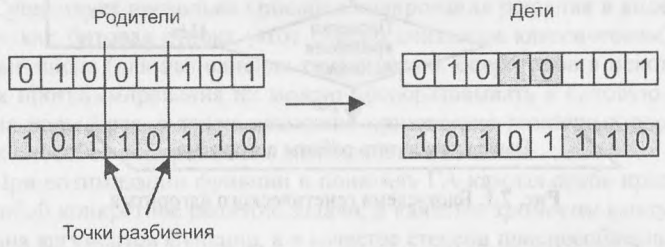


Рис. 7.3. Операция скрещивания с двумя точками разбиения

Иногда в качестве скрещивания можно использовать операцию взятия среднего арифметического или геометрического между хромосомами родителей, такой способ проще реализуется и быстро работает, но сходимость алгоритма при этом, как правило, хуже.

В результате скрещивания размер популяции может увеличиться на число созданных детей, либо дети заменят родителей в популяции. Операция скрещивания является самым важным этапом в ГА, так как именно от нее зависит сходимость решения к экстремуму и разнообразие популяции.

Мутация. После создания потомков к новым особям необходимо применить оператор мутации, который представляет собой изменение с небольшой вероятностью (обычно единицы процентов) одного или нескольких бит битовой строки хромосомы. Пример применения операции мутации представлен на рис. 7.4. Оператор мутации позволяет алгоритму выходить из локальных экстремумов, если популяция выродилась.

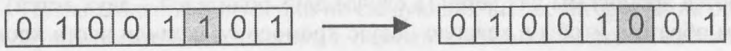


Рис. 7.4. Операция мутации

Оператор мутации может применяться как ко всем особям популяции, так и только для новых особей, полученных в результате скрещивания. В первом случае вероятность выхода из локального экстремума больше, но и больше вероятность того, что оператор мутации ухудшит найденное на предыдущей итерации решение. Чтобы избежать ухудшения решения оператор мутации можно реализовать так, что в результате мутации уже существующие решения не изменяются, а создаются новые особи с мутировавшими хромосомами.

Иногда кроме мутации используют дополнительно оператор инверсии, который переставляет местами группу генов (битов) в битовой строке хромосомы.

Отбор. После оператора мутации используется другой генетический оператор – отбор (или селекция) наиболее приспособленных видов. Оператор отбора позволяет поддерживать примерно постоянным размер популяции благодаря отбрасыванию наименее приспособленных особей.

Отбор может быть реализован несколькими способами, один из которых заключается в том, что для каждой особи из популяции на основании ее целевой функции вычисляется вероятность ее исключения из популяции. Затем создается случайное число от 0 до 1, и если оно меньше рассчитанной вероятности, то особь исключается из популяции и в дальнейшем алгоритме не участвует. Чтобы таким образом не исключать заведомо хорошие решения, можно ввести порог по значению целевой функции (например, половина среднего по популяции значения целевой функции). Если значение целевой функции особи больше порога, то эта особь остается в популяции до следующей итерации (следующего поколения).

Другой способ отбора состоит в поддержании постоянного размера популяции. В этом случае отбрасывается такое число наиболее неудачных особей, чтобы размер популяции не изменялся от поколения к поколению. В способе отбора, называемом «метод турнира», из популяции случайным образом выбираются две или несколько особей. Из них в следующее поколение переходит та, у которой значение целевой функции более оптимально. «Турнир» повторяется два раза, в результате чего выбираются два родителя, которые переходят в следующее поколение. Кроме того, во многих задачах можно исключать особи, которые представляют собой заведомо неправильные результаты, например, если значение хромосом, представляющих значение какого-то параметра, выходит за заданные заранее известные пределы.

Критерии останова. После применения всех генетических операторов проверяется качество полученного решения с помощью критериев останова. Их может быть несколько, и в случае выполнения одного из них алгоритм заканчивается.

Если известно значение оптимизируемой функции в ее глобальном экстремуме, то в качестве критерия останова используют разность по модулю между лучшим в данной популяции решением и значением оптимизируемой функции в экстремуме. Если эта разность достаточна мала, то считают, что алгоритм нашел оптимальное решение. Другой критерий останова применяется в случае, если значение целевой функции в глобальном экстремуме неизвестно, при этом на протяжении достаточного числа последних поколений в популяции не улучшалось найденное решение. Выполнение этого критерия означает, что найдено оптимальное значение, популяция выродилась и алгоритм не может выйти из локального экстремума. Если никакой из критериев останова не выполняется, то алгоритм переходит к созданию следующего поколения.

7.1.3. Модификации генетического алгоритма

Для улучшения показателей сходимости ГА и уменьшения вероятности попадания в локальный экстремум было предложено оптимизировать, кроме значений параметров целевой функции, также вероятность мутации и скрещивания. Кроме того, для повышения эффективности ГА можно все решения разбивать на отдельные локальные популяции, которые на протяжении некоторого числа поколений развиваются независимо друг от друга с выбором родителей из одной локальной популяции, а затем скрещиваются особи из разных популяций, после чего развитие отдельных популяция снова происходит независимо.

Эксперименты со схемами выбора родителей, которые используются в садоводстве и разведении домашних животных, привели к разработке и других способов выбора родителей. Например, тестирование потомства, когда от здоровья потомства может зависеть вероятность последующего скрещивания их родителей, или выбор семьи, когда а вероятность того, что особь будет выбрана как родитель, влияет значение целевой функции родителя.

7.1.4. Пример оптимизации невыпуклой функции

В качестве тестовой использовалась функция Швефеля, которая записывается в виде

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} -x_i \sin\left(\sqrt{|x_i|}\right). \qquad (7.1)$$

Функция (7.1) на интервале $-500 \le x_i \le 500$ имеет множество локальных экстремумов и один глобальный минимум в точке $\mathbf{X}$ с координатами $x_i = 420{,}9687$ для всех $i = 1, ..., n$. При этом значение функции (7.1) в этой точке можно рассчитать по формуле

$$f(\mathbf{X}_{\min}) = -418{,}9829n. \qquad (7.2)$$

На рис. 7.5 показаны линии уровня функции (7.1) для $n = 2$. Глобальный минимум $\mathbf{X}_{\min}$ при этом имеет координаты $(x_1 = 420{,}9687,\ x_2 = 420{,}9687)$, а значение функции (7.1) в этой точке с учетом отрицательного знака равно –837,9658.

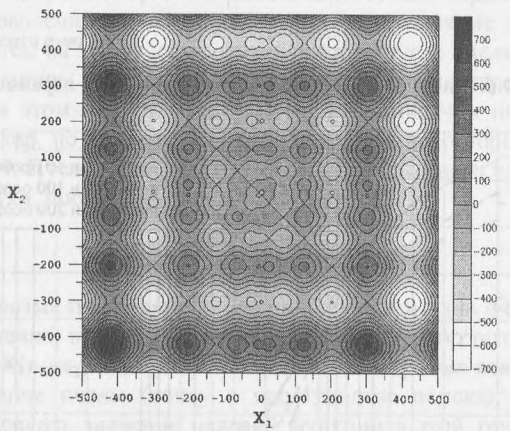


Рис. 7.5. Линии уровня функции Швефеля для $n = 2$

При тестировании генетического алгоритма с помощью целевой функции (7.1) при $n = 4$ глобальный минимум имеет координаты

$$\mathbf{X}_{\min} = (420{,}9687;\ 420{,}9687;\ 420{,}9687;\ 420{,}9687). \qquad (7.3)$$

Значение функции в глобальном минимуме равно

$$f(\mathbf{X}_{\min}) = -1675{,}93. \qquad (7.4)$$

При оптимизации функции (7.1) использовались следующие параметры ГА:

– размер популяции 100;
– вероятность скрещивания 0,95;
– вероятность мутации 0,1.

На рис. 7.6 изображена зависимость сходимости одного из четырех параметров оптимизируемой функции в зависимости от номера итерации. Остальные три параметра не показаны, так как их поведение аналогично.

На рис. 7.7 показаны зависимости значения целевой функции от номера итерации при различных размерах популяции. График получен с помощью усреднения по 100 независимым расчетам с одинаковыми параметрами алгоритма.

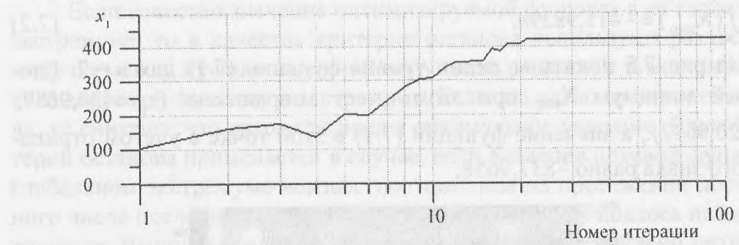


Рис. 7.6. Сходимость одного из оптимизируемых параметров

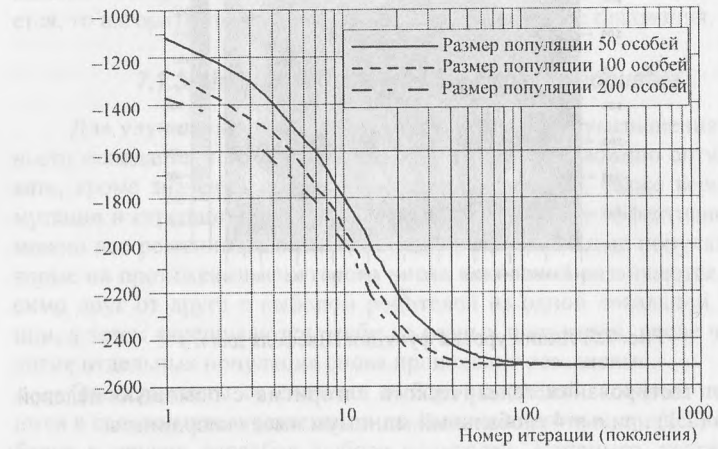


Рис. 7.7. Зависимость значения целевой функции от номера поколения

Для расчетов использовалась реализация ГА на языке C# под платформу .NET Framework 2.0. На ПЭВМ с процессором AMD Athlon64 3500+ с тактовой частотой 2,1 ГГц на 1000 итераций алгоритма с указанными параметрами было затрачено времени 0,393 с.

7.2. Алгоритм пчел для глобальной оптимизации

Алгоритм роя пчел для целого ряда оптимизационных задач позволяет существенно сократить время счета.

7.2.1. Идея алгоритма

Идея алгоритма возникла из наблюдения за поведением пчел при их поиске участков, где можно найти как можно больше нектара. Пчелы могут летать на довольно большие расстояния от улья в различных на-

правлениях, что напоминает определение экстремума на всей области поиска. Среди популяции пчел всегда есть небольшой процент так называемых пчел-разведчиков, которые начинают поиск нектара. Они разлетаются в случайных направлениях и перелетают с места на место, пока не найдут участок, где можно собирать нектар. После этого пчелы-разведчики возвращаются в улей. В случае, если они нашли хороший участок для сбора нектара, они сообщают особым образом остальным пчелам направление на найденный участок, расстояние до него и его качество. Затем на эти участки отправляются другие пчелы, причем чем больше на данном участке предполагается найти нектара, тем больше пчел летит в этом направлении. Если пчела-разведчик нашла участок, где есть нектар, но его мало (меньше определенного порога), то пчелы туда не летят. Пчелы-разведчики, в свою очередь, опять улетают искать другие участки, после чего процесс повторяется.

7.2.2. Описание алгоритма

В алгоритме пчел для оптимизации функции одна пчела обозначает одно решение, которое представляет собой вектор оптимизируемых параметров $\mathbf{X}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. С точки зрения алгоритма вектор $\mathbf{X}$ описывает положение пчелы (точку в пространстве поиска), по которому можно определить значение целевой функции в этой точке. Для алгоритма необходимо задать ряд параметров:

– число выбираемых участков, которые считаются перспективными, т.е. те участки, где было найдено достаточное количество нектара – N_{sel} (*sel* – от слова *selected*);

– число участков, которые будут считаться лучшими среди перспективных участков – N_{best};

– число пчел-разведчиков, участвующих в поиске на каждой итерации – N_{spy};

– закон, по которому будет определяться, сколько пчел необходимо отправить на тот или иной участок – N_{bees};

– начальный размер областей вокруг перспективных и выбранных точек – $\mathbf{R}$. В общем виде $\mathbf{R}$ является вектором, размер которого равен размеру вектора $\mathbf{X}$, а каждый элемент R_i – это размер области для параметра X_i.

Блок-схема алгоритма представлена на рис. 7.8.

Распределение пчел-разведчиков. На первом этапе алгоритма необходимо равномерно распределить всех N_{spy} пчел-разведчиков по всему пространству поиска. Этот шаг аналогичен созданию начальной популяции в ГА. С одной стороны, пчел-разведчиков не должно быть слишком мало, иначе они могут не попасть в область хорошего решения, но в то же время, чем больше пчел используется в алгоритме, тем

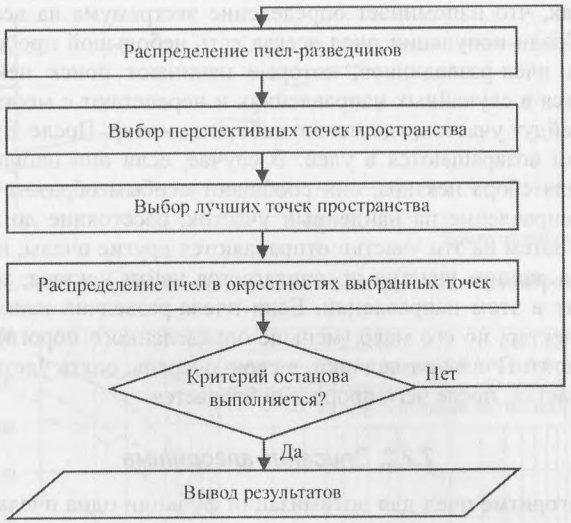


Рис. 7.8. Блок-схема алгоритма пчел

дольше длится одна итерация, так как для каждой точки (для каждой пчелы) необходимо рассчитать значение целевой функции.

Выбор перспективных и лучших точек пространства. На следующем этапе среди точек, обследованных пчелами-разведчиками, выбирается некоторое число N_{sel} точек с наибольшим (если алгоритм используется для поиска глобального максимума) значением целевой функции, которые в дальнейшем будут считаться перспективными (или выбранными). Затем из выбранных N_{sel} точек отдельно выделяются N_{best} точек с самым большим значением целевой функции. Эти точки будут считаться лучшими из найденных решений на данной итерации. Число выбранных и лучших точек обычно заранее задается и не меняется на протяжении всех итераций алгоритма.

На этом этапе нужно обратить внимание на одну особенность, которая может быть важна при реализации алгоритма. Пчела с координатами $\mathbf{X_1}$ $(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$ может попасть на один и тот же участок с пчелой с координатами $\mathbf{X_2}$ $(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})$, т.е. для всех i

$$x_{1i} - x_{2i} < R_i. \tag{7.5}$$

При этом можно выделить два варианта поведения:

– две пчелы нашли два разных пересекающихся участка, тогда оба этих участка отметить как лучшие или выбранные;

– это один участок, центр которого находится в точке, которая соответствует пчеле с бóльшим значением целевой функции. При этом

точку, которая попала в окрестность более хорошей точки, не считать перспективной и не выбирать ее. При таком поведении меньше вероятность того, что все пчелы окажутся в одном локальном экстремуме, но скорость сходимости алгоритма при этом уменьшится.

Распределение пчел в окрестностях выбранных точек. На следующем шаге алгоритма в окрестность выбранных точек (включая лучшие) посылаются новые пчелы. Конкретное положение пчелы определяется случайным образом, но обязательно так, чтобы исходная выбранная точка была в центре области, куда могут попасть пчелы. Размер случайной области R задается отдельным параметром, который нужно уменьшать по мере сходимости алгоритма, чтобы постепенно повышать точность определения положения экстремума.

Число N_{bees} посылаемых в окрестность точек пчел может задаваться по-разному. Например, в окрестность перспективных и лучших точек на каждой итерации посылается одинаковое число пчел, но обязательно так, чтобы число пчел отправляемых на лучшие участки, было больше, чем число пчел, отправляемых на остальные перспективные участки. Другой способ основан на том, что число пчел может зависеть непосредственно от значения целевой функции в конкретной точке. Чем больше значение целевой функции в данной точке, тем больше пчел отправляется в ее окрестности.

Текущим решением на данной итерации считается точка $\mathbf{X}_{curr}$, соответствующая пчеле с самым большим значением целевой функции (в случае, если ищется глобальный минимум; в противном случае – с самым маленьким значением целевой функции). Затем проверяются критерии останова алгоритма, которые могут быть такими же, как и при использовании ГА. Если хотя бы один из критериев выполняется, то алгоритм завершается и выводится результат, иначе алгоритм переходит к следующей итерации.

Размер областей по каждой из областей R_i либо всегда остается постоянным от итерации к итерации, либо постепенно уменьшается, позволяя таким образом находить решения со все большей точностью. В первом случае величина R_i должна быть небольшой, чтобы разброс искомых параметров при случайном поиске на каждой итерации был не очень велик, иначе можно пропустить экстремум. Во втором случае в конце каждой итерации все значения R_i можно умножать на некоторое значение k, чуть меньшее 1,0 (например, 0,99). Тогда

$$R_i^{N+1} = R_i^N k, \tag{7.6}$$

где R_i^{N+1} – значение i-го элемента вектора $\mathbf{R}$ на $(N+1)$-й итерации, а R_i^N – значение i-го элемента вектора $\mathbf{R}$ на N-й итерации.

Кроме того, для уменьшения времени счета постепенно уменьшают число пчел, особенно пчел-разведчиков, от которых можно вообще отказаться через некоторое число итераций.

7.2.3. Пример минимизации функции с одним экстремумом

Алгоритм пчел применялся к оптимизации различных тестовых функций, среди которых выделим две. Тестовая функция представляет собой гиперсферу

$$F = \sum_{i=0}^{N-1} x_i^2, \qquad (7.7)$$

имеет один глобальный минимум в точке с координатами ($x_0 = 0$; $x_1 = 0$; ...; $x_{N-1} = 0$), значение функции в этой точке равно 0. Других локальных экстремумов функция не имеет.

Для оптимизации данной функции с $N = 4$ использовались следующие параметры алгоритма пчел:

– область поиска решения по каждой переменной x_i ограничивалась интервалом [–200,0; 200,0];

– число пчел-разведчиков $N_{spy} = 200$;

– число пчел, отправляемых на перспективные участки, было постоянно для всех итераций и равнялось $N_{sel\ bees} = 5$;

– число пчел, отправляемых на лучшие участки было постоянно для всех итераций и равнялось $N_{best\ bees} = 15$;

– число выбираемых перспективных участков $N_{sel} = 10$;

– число выбираемых лучших участков $N_{best} = 5$;

– начальный размер выбранных и лучших областей по каждому параметру $R_i = 40$;

– коэффициент сжатия размеров выбранных и лучших областей по каждому параметру $k = 0{,}995$.

Общее число пчел, которые участвуют в каждой итерации алгоритма, можно рассчитать по формуле

$$N_{all\ bees} = N_{best\ bees} N_{best} + N_{sel\ bees} N_{sel} + N_{spy}. \qquad (7.8)$$

В данном случае на каждой итерации алгоритма $N_{all\ bees} = 325$ пчел. Именно столько раз нужно вычислить значение целевой функции на каждой итерации.

Для оптимизации функции (7.7) использовалась реализация алгоритма пчел на языке C# под платформу .NET Framework 2.0. На ПЭВМ с процессором AMD Athlon64 3500+ с тактовой частотой 2,1 ГГц на 1000 итераций алгоритма с указанными параметрами было затрачено времени 0,422 с. При этом найдено решение: $x_1 = 0{,}00529$; $x_2 = -0{,}02285$; $x_3 = -0{,}01663$; $x_4 = 0{,}00282$.

На рис. 7.9,*а–г* показаны графики сходимости каждого из четырех параметров функции в зависимости от номера итерации. Так как алгоритм пчел является вероятностным , то для большей информативности графики на рис. 7.9 получены путем усреднения по 30 запускам алгоритма при одних и тех же параметрах.

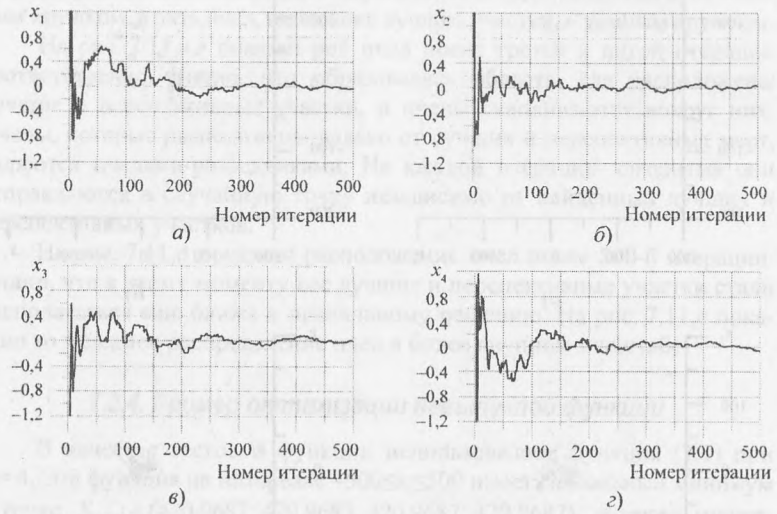


Рис. 7.9. Графики сходимости параметров оптимизируемой функции к глобальному минимуму

На рис. 7.10 изображена зависимость значения целевой функции (7.7) от номера итерации. График на рис. 7.10 получен также усреднением по 30 итерациям при одних и тех же начальных параметрах алгоритма.

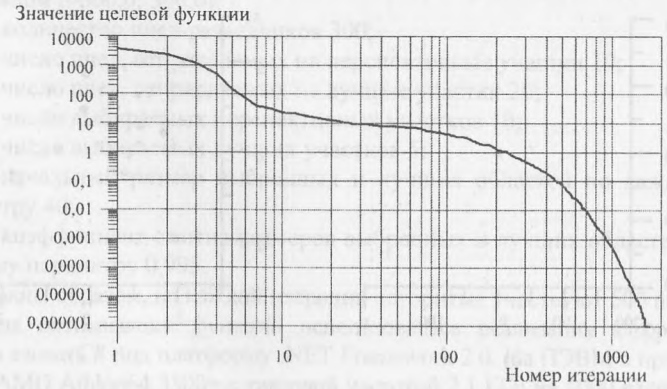


Рис. 7.10. Зависимость значения целевой функции от номера итерации

На рис. 7.11,*а* дано начальное распределение пчел на пространстве поиска. Каждая пчела, участвующая в алгоритме, на этом рисунке представлена

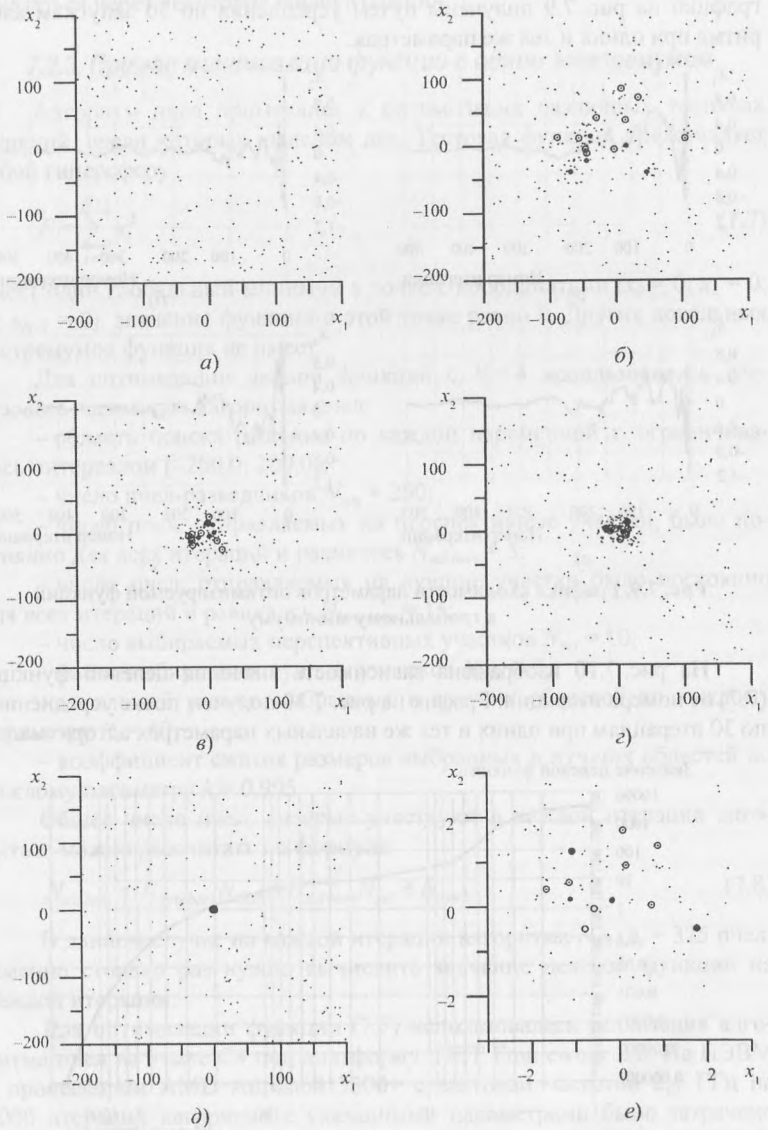


Рис. 7.11. Распределение пчел в пространстве поиска

в виде точки на плоскости, у которой координата по горизонтальной оси обозначает значение переменной x_1, координата по вертикальной оси – x_2. Остальные переменные x_3 и x_4 в отображении не участвуют.

На рис. 7.11,*б* изображен рой пчел после первой итерации. На этом рисунке десять пчел, нашедшие перспективные участки, отмечены светлым кружком, а пять пчел, нашедшие лучшие участки, – темным кружком.

На рис. 7.11,*в*,*г* показан рой пчел после третей и пятой итерации соответственно. Видно, что образовалась область, где расположены лучшие и перспективные участки, и пчелы скапливаются вокруг них. Пчелы, которые расположены далеко от лучших и перспективных мест, являются пчелами-разведчиками. На каждой итерации алгоритма они отправляются в случайную точку независимо от найденных лучших и перспективных участков.

На рис. 7.11,*д* показано расположение пчел после 500-й итерации. Видно, что к этому моменту все лучшие и перспективные участки стали располагаться еще ближе к правильному решению. На рис. 7.11,*е* показано то же самое распределение пчел в более крупном масштабе.

7.2.4. Пример оптимизации невыпуклой функции

В качестве тестовой функции использовалась функция (7.1) при $n = 4$. Эта функция на интервале $-500 \le x_i \le 500$ имеет глобальный минимум в точке $\mathbf{X}_{\min} = (420{,}9687;\ 420{,}9687;\ 420{,}9687;\ 420{,}9687)$, а также множество локальных экстремумов. Минимальное значение функции в глобальном экстремуме можно рассчитать по выражению (7.2).

При оптимизации этой функции использовались следующие параметры алгоритма пчел:

– область поиска решения по каждой переменной ограничивалась интервалом [–500,0; 500,0];

– количество пчел-разведчиков 300;

– число пчел, отправляемых на перспективные участки 10;

– число пчел, отправляемых на лучшие участки 20;

– число выбираемых перспективных участков 10;

– число выбираемых лучших участков 5;

– начальный размер выбранных и лучших областей по каждому параметру 40;

– коэффициент сжатия размеров выбранных и лучших областей по каждому параметру 0,995.

Таким образом, на каждой итерации алгоритма участвуют 500 пчел.

Для оптимизации функции использовалась реализация алгоритма пчел на языке C# под платформу .NET Framework 2.0. На ПЭВМ с процессором AMD Athlon64 3500+ с тактовой частотой 2,1 ГГц на 1000 итераций алгоритма с указанными параметрами было затрачено времени 0,657 с.

За 3000 итераций найдено решение: x_1 = 420,968745; x_2 = 420,968748; x_3 = 420,968746; x_4 = 420,968746.

На рис. 7.12 показаны графики сходимости каждого из четырех параметров функции в зависимости от номера итерации. Графики на рис. 7.12 получены путем усреднения по 30 запускам алгоритма при одних и тех же параметрах.

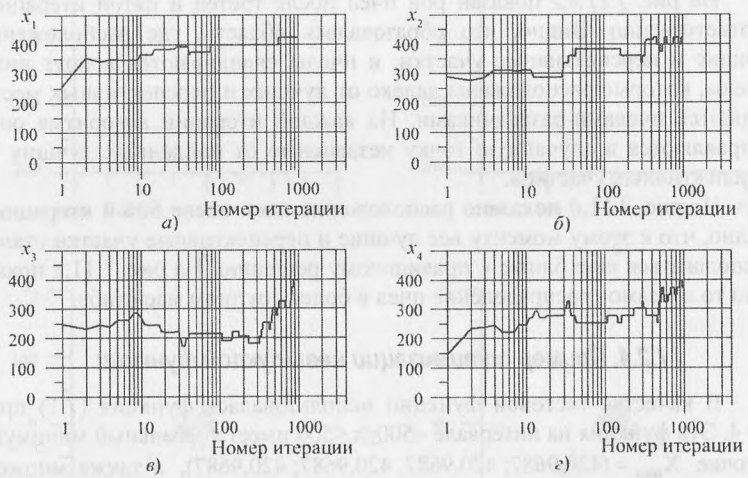


Рис. 7.12. Сходимость алгоритма к решению в зависимости от номера итерации

На рис. 7.13 изображена зависимость значения целевой функции от номера итерации. График на рис. 7.13 получен также усреднением по 30 итерациям при одних и тех же параметрах.

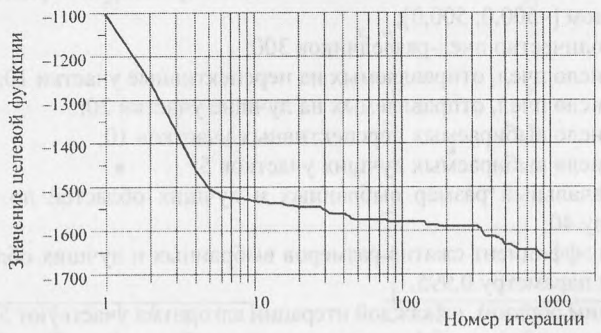


Рис. 7.13. Зависимость значения целевой функции от номера итерации

На рис. 7.14 дано начальное распределение пчел на пространстве поиска. Каждая пчела, участвующая в алгоритме, на этом рисунке пред-

ставлена в виде отметки, у которой координата по горизонтальной оси обозначает значение переменной x_1, координата по вертикальной оси – x_2. Остальные переменные x_3 и x_4 в отображении не участвуют.

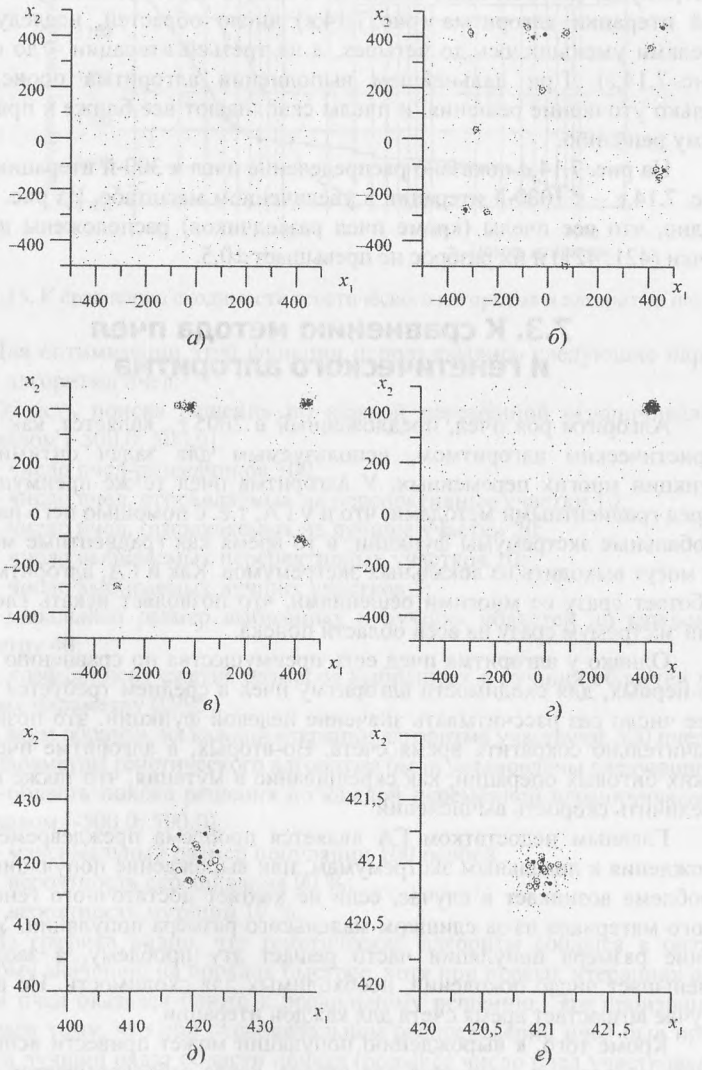


Рис. 7.14. Распределение пчел на пространстве поиска

На рис. 7.14,*а* изображено начальное распределение пчел на пространстве поиска. На рис. 7.14,*б* показано расположение пчел на пространстве поиска после первой итерации. Из рисунка видно, что пчелы обнаружили 15 областей, вблизи которых расположены локальные экстремумы (пять лучших областей и десять перспективных). На второй итерации алгоритма (рис. 7.14,*в*) число областей, исследуемых пчелами уменьшилось до четырех, а на третьей итерации – до одной (рис. 7.14,*г*). При дальнейшем выполнении алгоритма происходит только уточнение решения, и пчелы скапливают все ближе к правильному решению.

На рис. 7.14,*д* показано распределение пчел к 300-й итерации, а на рис. 7.14,*е* – к 1000-й итерации в увеличенном масштабе. Из рис. 7.14,*е* видно, что все пчелы (кроме пчел разведчиков) расположены вблизи точки (421; 421) и их разброс не превышает ±0,5.

7.3. К сравнению метода пчел и генетического алгоритма

Алгоритм роя пчел, предложенный в 2005 г., является, как и ГА, эвристическим алгоритмом, используемым для задач оптимизации функции многих переменных. У алгоритма пчел те же преимущества перед градиентными методами, что и у ГА, т.е. с помощью него находят глобальные экстремумы функции, в то время как градиентные методы не могут выходить из локальных экстремумов. Как и ГА, алгоритм пчел работает сразу со многими решениями, что позволяет искать глобальный экстремум сразу на всей области поиска.

Однако у алгоритма пчел есть преимущества по сравнению с ГА. Во-первых, для сходимости алгоритму пчел в среднем требуется меньшее число раз рассчитывать значение целевой функции, что позволяет значительно сократить время счета. Во-вторых, в алгоритме пчел нет таких битовых операций, как скрещивание и мутация, что также может увеличить скорость вычислений.

Главным недостатком ГА является проблема преждевременного схождения к локальным экстремумам, или вырождение популяции. Эта проблема возникает в случае, если не хватает достаточного генетического материала из-за слишком маленького размера популяции. Увеличение размера популяции часто решает эту проблему, а заодно и уменьшает число поколений, необходимых для сходимости. Но в этом случае возрастает время счета для каждой итерации.

Кроме того, к вырождению популяции может привести использование неудачного алгоритма для отбора, когда отбраковывается слишком много особей.

На рис. 7.15 показаны сходимости ГА и алгоритма пчел при минимизации функции (7.1).

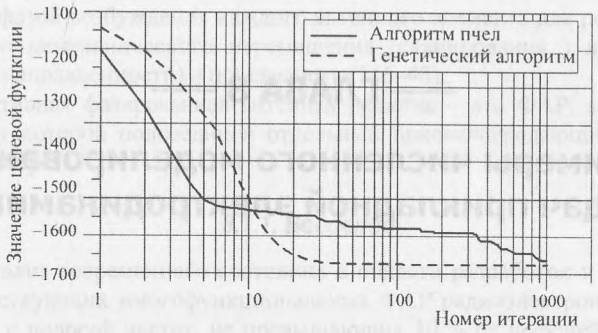


Рис. 7.15. К сравнению сходимости генетического алгоритма и алгоритма пчел

Для оптимизации этой функции использовались следующие параметры алгоритма пчел:

Область поиска решения по каждой переменной ограничивался интервалом [-500,0; 500,0].

– число пчел-разведчиков 300;

– число пчел, отправляемых на перспективные участки 10;

– число пчел, отправляемых на лучшие участки 20;

– число выбираемых перспективных участков 10;

– число выбираемых лучших участков 5;

– начальный размер выбранных и лучших областей по каждому параметру 40;

– коэффициент сжатия размеров выбранных и лучших областей по каждому параметру 0,995.

Таким образом, на каждой итерации алгоритма участвуют 500 пчел.

Параметры генетического алгоритма были установлены следующие:

– область поиска решения по каждой переменной ограничивалась интервалом [-500,0; 500,0],

– максимальный размер популяции 100 особей;

– вероятность скрещивания 90 %;

– вероятность мутации 10 %.

Из графика видно, что генетический алгоритм сошелся к оптимальному значению на порядок быстрее, хотя при первых итерациях алгоритм пчел оказался ближе к правильному решению. Это произошло благодаря тому, что при первоначальном распределении пчел был произведен лучший охват области поиска (большее число пчел участвовало в алгоритме).

— ГЛАВА 8 —

Примеры численного моделирования задач прикладной электродинамики

Ранее были рассмотрены особенности численных методов, влияние погрешности дискретизации, сходимость и устойчивость решения. Проиллюстрируем на двух примерах возможности процедуры численного моделирования с использованием МКРВО (FDTD) и МКЭ (FEM), которая, по мнению автора, должна предшествовать этапам реализации технического устройства. Первый пример (п.п. 8.1–8.7) – моделирование характеристик щелевых металлодиэлектрических неоднородных излучателей (МНИ) в составе многоэлементной ФАР. Оно вызвано необходимостью расширения полосы рабочих частот антенного полотна ФАР до двух октав при сохранении широкого сектора сканирования, что обеспечит существенное продвижение в решении существующих проблем по созданию нового поколения многофункциональных радиоэлектронных комплексов с ФАР (АФАР). Второй пример (п.п. 8.8–8.9) – моделирование задачи восстановления параметров дорожных покрытий, зондируемых сверширокополосным короткоимпульсным сигналом. Это позволяет повысить достоверность диагностики, увеличить в несколько раз оперативность мониторинга, исключить трудоемкие инвазивные процедуры контрольного бурения, сократить расходы на эксплуатацию, создать устойчивую ежегодно обновляемую базу данных эксплуатируемых объектов подповерхностной инфраструктуры.

8.1. Подготовительный этап моделирования характеристик щелевых металлодиэлектрических неоднородных излучателей в составе фазированной антенной решетки

Антенная решетка (АР) – система индивидуальных антенных элементов (излучателей), расположенных в пространстве определенным

образом, электромагнитное поле которых является суперпозицией полей отдельных элементов [44, 45].

Фазированная антенная решетка – класс АР с независимым управлением фазой возбуждения каждого антенного элемента для реализации быстрого немеханического перемещения (сканирования) луча (диаграммы направленности) в пространстве [46–48].

Активная фазированная антенная решетка – это ФАР, к каждому элементу которой подсоединен отдельный приемо-передающий модуль (ППМ) [49].

8.1.1. Введение

Анализ современного состояния в области разработок и применения действующих многофункциональных ФАР радиоэлектронных комплексов с полосой частот, не превышающих 10 % от несущей частоты, показал, что в настоящее время практически исчерпан резерв «очевидных» модернизаций ФАР. На повестке дня стоит вопрос создания широкополосных сканирующих многофункциональных ФАР, обеспечивающих одновременную работу в нескольких режимах, улучшенные технические характеристики, увеличенную скорость обзора пространства, высокий потенциал и надежность, повышенную помехозащищенность. При этом значение коэффициента использования поверхности должно быть не менее 0,45…0,5 при одновременном обеспечении низкого (≤25…30 дБ) уровня боковых лепестков диаграммы направленности и выполнении жестких ограничений по массе, продольному размеру ФАР, а также высоком значении средней и импульсной мощности.

По прогнозу западных и отечественных специалистов расширение полосы рабочих частот антенного полотна ФАР до октавы при секторе сканирования ±55° и двух октав и более при секторе сканирования ±45° обеспечит существенное продвижение в решении существующих проблем по созданию нового поколения многофункциональных радиоэлектронных комплексов с ФАР (АФАР), обеспечивающих функции РЛС, радиотехнической разведки, радиоэлектронного подавления, радионавигации и связи на СВЧ (табл. 8.1).

Таблица 8.1

Вариант совмещения диапазонов	**1**	**2**	**3**
полоса частот:	X–K (8…26 ГГц)	C–X (4…12 ГГц)	C–K (4…26 ГГц)
Сектор сканирования и полоса частот			
±55° в полосе:	8…16 ГГц	4…8 ГГц	4…8 ГГц
±45° в полосе:	8…26 ГГц	4…12 ГГц	4…26 ГГц

Построение широкополосного антенного полотна электрически сканирующих АР основывается на принципе управления эффектом взаимного влияния элементов АР [50]. Наиболее подготовленной к практической реализации является сканирующая АР на основе щелевого МНИ (tapered slot antenna, endfire slotline antenna, Vivaldi antenna) [50].

Максимальный шаг d_X, d_Y размещения элементов в двумерной периодически эквидистантной АР (см. рис. 8.1) определяется из условия отсутствия дифракционных максимумов при отклонении луча на максимальный угол θ_{max} в обеих плоскостях [44, 45]:

$$d_X, d_Y < \frac{\lambda_{min}}{1+|\sin\theta_{max}|}. \qquad (8.1)$$

Для исключения резкого рассогласования на границе сектора сканирования из-за конечной ширины дифракционного лепестка расстояния d_X, d_Y уменьшают на (5...10) %.

При этом расстояние между элементами широкополосной АР на низкой частоте оказывается менее 0,1λ, что приводит к сильному взаимному влиянию между элементами и ограничению полосы и сектора сканирования. Верхняя частота и сектор сканирования ограничиваются в первую очередь появлением дифракционного лепестка. Параметр широкополосности, определяемый как отношение верхней и нижней граничной частоты рабочей полосы частот, превышает 2:1…4:1 при КСВ в тракте питания не хуже 2,0 и сканировании лучом в секторе ±55°.

Непосредственный расчет полотна антенной решетки с конечным числом элементов (10 и более) при использовании программного обеспечения на основе МКЭ (FEM) и МКРВО (FDTD) требует применения высокопроизводительной вычислительной техники (в частности, объем ОЗУ определяется из расчета от 0,2…0,5 Гбайт (для FDTD) до 1,0…2,5 Гбайт (для FEM) на один элемент) и значительных затрат времени.

8.1.2. Конструкция излучателя и антенного полотна

Конструкция излучателя показана на рис. 8.1. Геометрические параметры конструкции: A – расстояние до отверстия, B – расстояние до расширяющегося участка щели, C – ширина прямолинейного участка щели, D – диаметр отверстия, E – ширина раскрыва щели, F – смещение питающего полоска по вертикали, G – расстояние до пересечения полоска с щелью, H – ширина горизонтальной части питающего полоска, J – ширина вертикальной части питающего полоска, K – длина вертикального отрезка полосковой линии, L – длина элемента, P – толщина слоев металлизации, Q – параметр формы раскрыва, R – радиус кругового шлейфа питающего полоска, T – толщина диэлектрической подложки,

W – ширина элемента, φ – ширина кругового сектора, θ – угол наклона кромки кругового сектора, α – параметр формы экспоненциального раскрыва, β – параметр формы экспоненциального раскрыва. Характерными особенностями являются: использование трех слоев металлизации; во внешнем слое – круглая форма отверстия, закорачивающего щелевую линию, а также экспоненциальная форма расширяющегося участка щели; во внутреннем слое – форма разомкнутого шлейфа, нагружающего полосковую линию, в виде кругового сектора с углом наклона θ передней грани к оси OZ и с углом сектора φ.

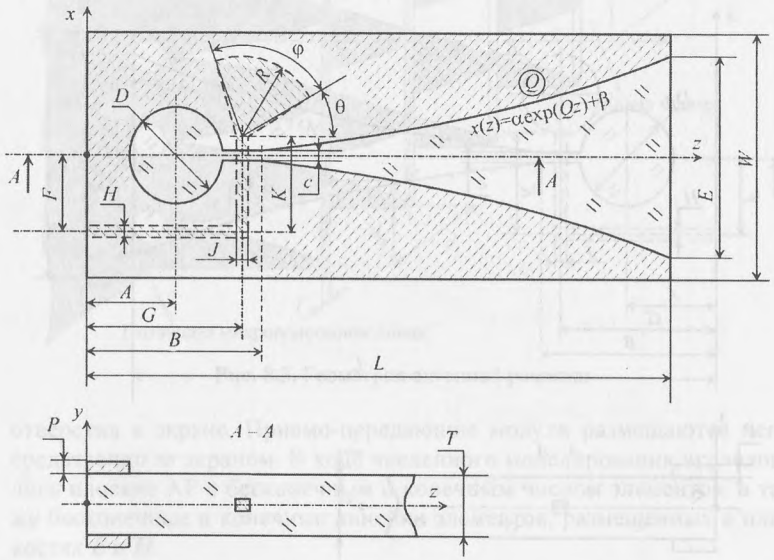


Рис. 8.1. Щелевой металлодиэлектрический неоднородный излучатель. базовая конструкция

Излучатель представляет собой прямоугольную пластину из диэлектрического материала с тремя слоями металлизации: двумя слоями на внешних гранях и одним внутренним слоем. Внешние слои металлизации – одинаковые, содержат вырез (щель) специальной формы, в котором условно выделяются расширяющийся неоднородный участок (справа) и короткозамкнутый участок в виде круговой выемки (слева). Внешние слои металлизации осуществляют излучение электромагнитной волны в свободное пространство. Внутренний слой металлизации содержит симметричную полосковую линию, служащую для подведения радиочастотного сигнала (возбуждения) к упомянутой щели во внешних слоях металлизации, для возбуждения электромагнитной вол-

ны в упомянутой щели и для обеспечения согласования полного сопротивления излучателя с сопротивлением источника сигнала. Полосковая линия пересекает расширяющийся неоднородный участок щели внешних слоев металлизации и оканчивается разомкнутым шлейфом в виде кругового сектора.

Излучатель, показанный на рис. 8.2, отличается круговой (диаметром $2R$) формой шлейфа. Как правило, шлейф размещается в направлении оси OX таким образом, что нижний его край совпадает с верхним краем однородного участка внешнего слоя металлизации ($K = F + C/2$).

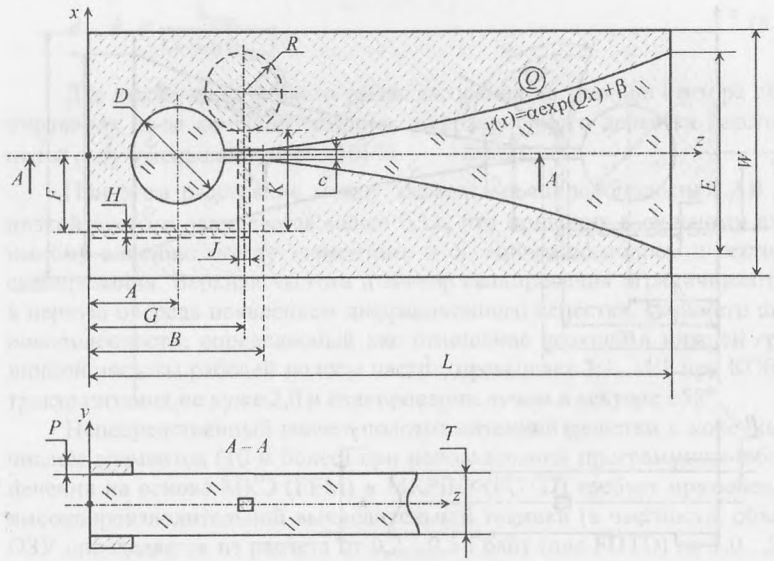


Рис. 8.2. Щелевой металлодиэлектрический неоднородный излучатель с шлейфом в форме круга

Конструкция полотна АР показана на рис. 8.3. Под плоскостью E далее понимается плоскость XOZ, под плоскостью H – плоскость XOY, под плоскостью D (диагональной) – плоскость, проходящая через ось OZ и биссектрису угла, образованного осями OX и OY. Элементы АР размещены на прямоугольной сетке с шагом d_x в плоскости E и d_y в плоскости H.

Элементы в линейках, располагающихся в направлении OX, выполнены на единой пластине фольгированного диэлектрика. Тыльная сторона элемента крепится к металлическому экрану, причем внешние слои металлизации имеют с экраном электрический контакт. Возбуждение осуществляется от приемо-передающих модулей через сквозные

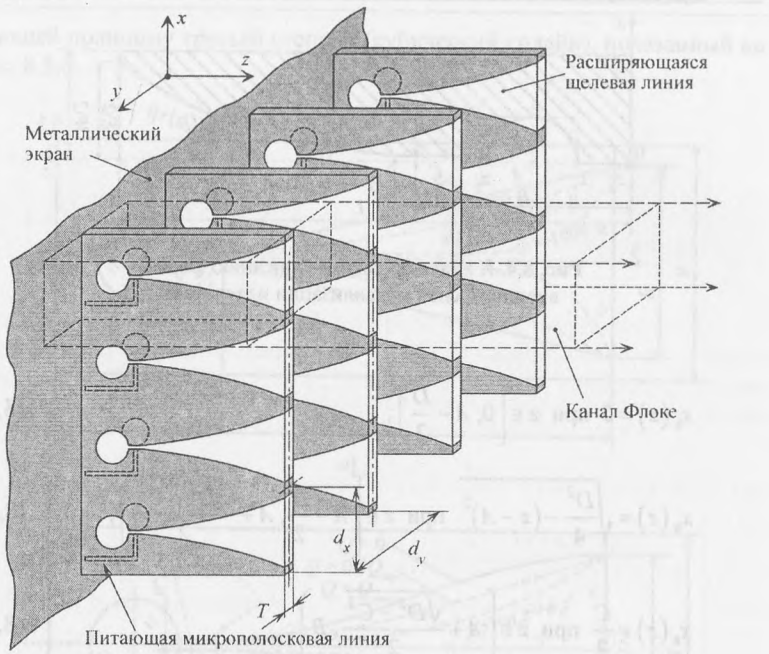


Рис. 8.3. Геометрия антенной решетки

отверстия в экране. Приемо-передающие модули размещаются непосредственно за экраном. В ходе численного моделирования исследовались плоские АР с бесконечным и конечным числом элементов, а также бесконечные и конечные линейки элементов, размещенных в плоскостях E и H.

8.1.3. Описание геометрии излучателя

Внешние слои металлизации. Во всех вариантах конструкции (см. рис. 8.1 и 8.2) профиль (форма рисунка) металлизации на внешних (верхней и нижней) гранях подложки одинаков и симметричен относительно оси OZ. В направлении оси OZ профиль состоит из четырех фрагментов (рис. 8.4): от z_0 до z_1 – сплошной участок, от z_1 до z_2 – сегмент окружности, от z_2 до z_3 – однородная (прямолинейная) щелевая линия, от z_3 до x_4 – расширяющаяся щелевая линия.

Для экспоненциального расширения и круглого отверстия профиль $x_в(z)$ «верхней» ($x \geq 0$) половины описывается следующими уравнениями:

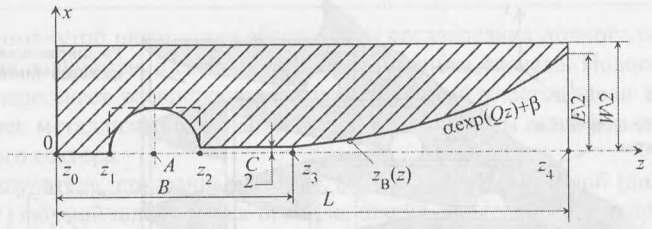


Рис. 8.4. К аналитическому описанию формы внешнего слоя металлизации излучателя

$$x_в(z)=0 \text{ при } z\in\left[0, A-\frac{D}{2}\right); \tag{8.2а}$$

$$x_в(z)=\sqrt{\frac{D^2}{4}-(z-A)^2} \text{ при } z\in\left[A-\frac{D}{2}, A+\frac{\sqrt{D^2-C^2}}{2}\right); \tag{8.2б}$$

$$x_в(z)=\frac{C}{2} \text{ при } z\in\left[A+\frac{\sqrt{D^2-C^2}}{2}, B\right); \tag{8.2в}$$

$$x_в(z)=\alpha e^{Qz}+\beta \text{ при } z\in[B, L]. \tag{8.2г}$$

В формуле (8.2г) параметры α и β вычисляются согласно выражениям

$$\alpha=\frac{E-C}{2\left(e^{QL}-e^{QB}\right)}; \tag{8.3а}$$

$$\beta=\frac{Ce^{QL}-Ee^{QB}}{2\left(e^{QL}-e^{QB}\right)}. \tag{8.3б}$$

На рис. 8.5,*а* показана трансформация формы щелевой линии при варьировании параметра формы Q. При малых значениях параметра формы ($Q\to 0$) щель расширяется по линейному закону, и в начальном участке расширения (при $z=B$) присутствует излом, который может стать локальным источником отражений и отрицательно влиять на качество согласования антенны. Для преодоления указанного недостатка предложен излучатель с формой расширяющего участка, соответст-

вующей полиному третьей степени (кубический сплайн), показанный на рис. 8.5,*б*.

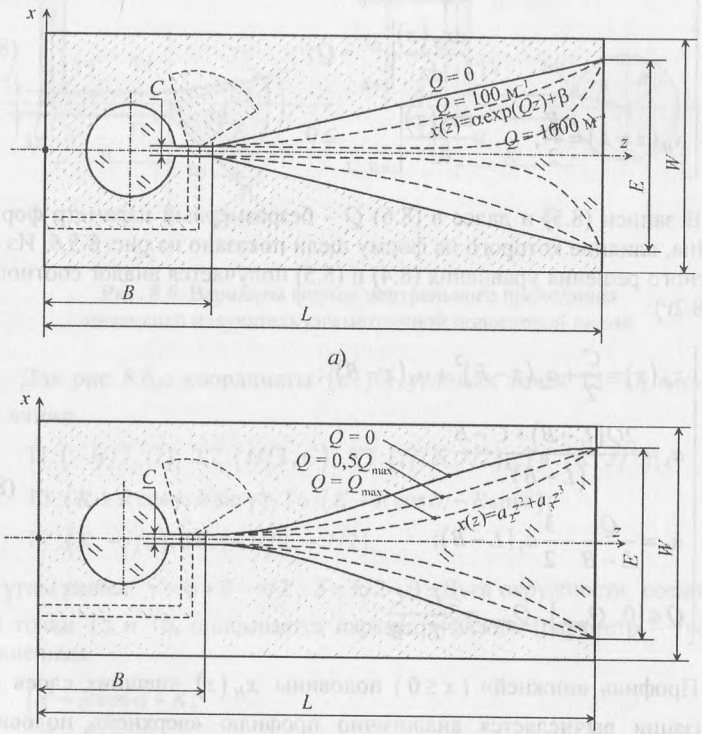


Рис. 8.5. Щелевой МНИ с различной формой неоднородного расширяющегося участка щели:
а – экспоненциальная форма; *б* – кубический сплайн

Уравнение профиля щели, расширяющейся по закону сплайна, в общем случае имеет вид

$$x_B(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3. \tag{8.4}$$

Для определения коэффициентов $a_0\ldots a_3$ уравнение (8.4) следует дополнить ограничениями на координаты точек начала и конца сплайна, на крутизну на начальном и конечном участках, а также условием монотонности

$$\begin{cases} x_B(z=B)=\dfrac{C}{2}; & \left.\dfrac{dx_B(z)}{dz}\right|_{z=B}=0; \\ & \left.\dfrac{dx_B(z)}{dz}\right|_{z=L}=Q; \\ x_B(z=L)=\dfrac{E}{2}; & \left.\dfrac{dx_B(z)}{dz}\right|_{z\in B\ldots L}\geq 0. \end{cases} \tag{8.5}$$

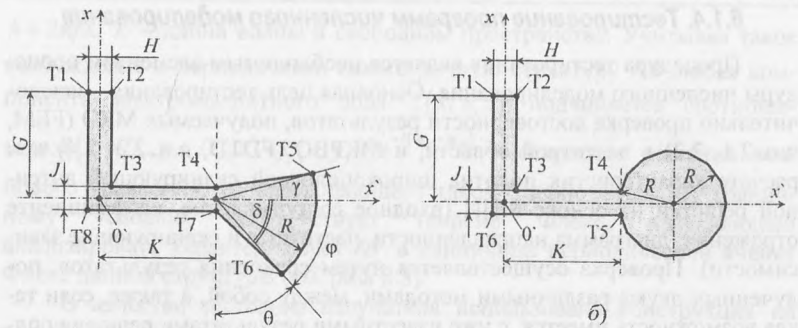
В записи (8.5) и далее в (8.6) Q – безразмерный параметр формы сплайна, влияние которого на форму щели показано на рис. 8.5,*б*. Из совместного решения уравнения (8.4) и (8.5) получается аналог соотношения (8.2г):

$$\begin{cases} x_B(z)=\dfrac{C}{2}+a_2(z-B)^2+a_3(z-B)^3; \\ a_3=\dfrac{2Q(L-B)+C-E}{(L-B)^3}; \\ a_2=\dfrac{Q}{L-B}-\dfrac{3}{2}a_3(L-B); \\ Q\in[0,\ Q_{\max}],\ Q_{\max}=3\dfrac{E-C}{L-B}. \end{cases} \tag{8.6}$$

Профиль «нижней» ($x\leq 0$) половины $x_H(z)$ внешних слоев металлизации вычисляется аналогично профилю «верхней» половины $x_B(z)$ с использованием выражений (8.2) или (8.6) и условия симметрии: $x_i(z)=-x_B(z)$.

Внутренний слой металлизации. На рис. 8.6,*а*,*б* показаны варианты формы питающей симметричной полосковой линии, располагающейся во внутреннем слое подложки излучателя. В каждом случае профиль (рисунок) металлизации состоит из двух однородных отрезков линии и нагружающего линию разомкнутого шлейфа в виде окружности либо кругового сектора. На рисунках введена местная система координат (x',y'), которая связана с системой координат (z,x) рис. 8.1 и 8.2 соотношениями

$$\begin{cases} x'=F+x; \\ y'=G-z; \end{cases} \quad \begin{cases} z=G-y'; \\ x=-F+x'. \end{cases} \tag{8.7}$$



а) *б*)

Рис. 8.6. Варианты формы центрального проводника питающей излучатель симметричной полосковой линии

Для рис. 8.6,*а* координаты (x',y') угловых точек T1–T8 полосковой линии

$$\begin{aligned} &T1:(-H/2,G);\ T2:(H/2,G);\ T3:(H/2,J/2);\ T4:(K,J/2); \\ &T5:(K+R\cos\gamma,R\sin\gamma);\ T6:(K+R\cos\delta,-R\sin\delta); \\ &T7:(K,-J/2);\ T8:(-H/2,-J/2), \end{aligned} \tag{8.8}$$

где углы равны: $\gamma=\varphi+\theta-\pi/2$, $\delta=\pi/2-\theta$. Дуга окружности, соединяющая точки T5 и T6, описывается параметрическим (параметр – угол σ) уравнением

$$\begin{cases} x'=R\cos\sigma+K; \\ y'=R\sin\sigma; \\ \sigma\in[\gamma,-\delta]. \end{cases} \tag{8.9}$$

Для рис. 8.6,*б* координаты угловых точек T1–T3 совпадают с определенными в соотношении (8.8), T6 совпадает с T8 из (8.8), оставшиеся точки:

$$T4:\left(K+\frac{J}{2\operatorname{tg}\varphi/2},J/2\right);\quad T5:\left(K+\frac{J}{2\operatorname{tg}\varphi/2},-J/2\right). \tag{8.10}$$

Дуга окружности, соединяющая точки T4 и T5, описывается параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x'=R\cos\sigma+K+\sqrt{R^2-J^2/4}; \\ y'=R\sin\sigma; \\ \sigma\in[\pi-\arcsin J/2R,-\pi+\arcsin J/2R]. \end{cases} \tag{8.11}$$

8.1.4. Тестирование программ численного моделирования

Процедура тестирования является необходимым элементом процедуры численного моделирования. Основная цель тестирования – исключительно проверка достоверности результатов, получаемых МКЭ (FEM, п.п. 2.1, 2.2) в частотной области, и МКРВО (FDTD, п.п. 2.3, 2.4) при расчете характеристик полотна широкополосной сканирующей антенной решетки на основе МНИ (входное сопротивление, коэффициенте отражения, диаграмма направленности, частотные и сканирующие зависимости). Проверка осуществляется путем сравнения результатов, полученных двумя различными методами, между собой, а также, если такая возможность имеется, с уже известными результатами решения родственных задач. Полученные результаты также помогают выявить особенности работы отдельных составных частей излучателя.

При анализе сканирующих АР с учетом взаимных связей между элементами используются следующие подходы [44–48]:

1. Поэлементный подход, сводящий решение электродинамической задачи для всей совокупности $M \times N$ элементов и решение ее к одному из указанных методов. На практике из-за резкого нарастания вычислительных затрат (для сложных широкополосных излучателей) такой подход до недавнего времени был целесообразен для процессоров средней производительности при относительно небольшом числе излучателей в АР (от единиц до нескольких десятков). В последнее время намечен существенный прогресс при численном моделировании – проанализирована 2401-элементная (49×49) АР (объем ОЗУ 14 Гбайт, точность арифметики 32 бит).

2. Второй подход, основанный на модели бесконечной решетки, полезен при определении характеристик больших решеток (на практике для узкополосных антенн дает приемлемый результат при числе элементов в АР большем 200–300). В этом случае используют метод на основе бесконечных периодических структур, основной идеей которого является замена АР бесконечной открытой периодической структурой и анализ поля в единичной периодической ячейке такой структуры. Предполагается, что конечная решетка дополнена до бесконечной элементами, нагруженными на согласованные нагрузки и образующими с элементами конечной решетки бесконечную периодическую структуру.

Обобщенная модель антенного полотна бесконечной ФАР представлена на рис. 8.3. Элементы расположены в узлах прямоугольной сетки, возбуждаются равномерно по амплитуде с линейным фазовым набегом $I_{00}\exp\left[-i\left(m\psi_x + n\psi_y\right)\right]$, где (m, n) – номер элемента; $\psi_x = kd_x \sin\theta\cos\varphi$, $\psi_y = kd_y \sin\theta\sin\varphi$ – фиксированные сдвиги фаз по направлениям x и y; d_x, d_y – шаг расположения элементов по соответствующим осям;

$k = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны в свободном пространстве. Учитывая такое возбуждение и периодически симметричную структуру АР любая компонента электромагнитного поля $\xi(x, y, z)$ подчиняется соотношению: $\xi\left(x + D_x, y + D_y, z\right) = \xi(x, y, z)e^{-i(\psi_x + \psi_y)}$. Построение решения волнового уравнения, удовлетворяющего такому периодическому граничному условию, соответствует теореме Флоке, позволяющей анализировать характеристики АР в единичной периодической ячейке Флоке данной структуры (см. рис. 8.3).

В качестве тестового излучателя использована конструкция на рис. 8.1 и геометрические размеры элемента двумерной многоэлементной АР (см. рис. 8.3) для работы в полосе частот 1,5…5,0 ГГц. Геометрические размеры элемента выбраны как результат предварительного моделирования и приведены в табл. 8.2 (колонка 3). Левая грань каждой структуры соприкасается (имеет электрический контакт) с бесконечной идеально проводящей плоскостью (PEC) – металлическим экраном полотна АР (см. рис. 8.3). Основной результат расчета – зависимость действительной и мнимой составляющих входного сопротивления от частоты в полосе 0,5…10,0 ГГц, полученные для модели бесконечной АР.

Таблица 8.2

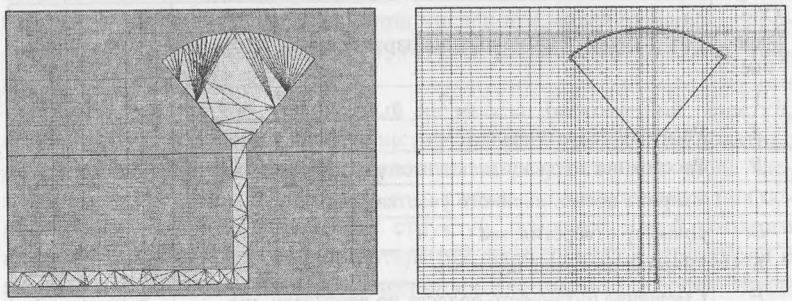
Обозначение	Наименование параметра	Значение	
1	2	3	4
A	Расстояние до отверстия, мм	10,0	4,6
B	Расстояние до расширяющегося участка щели, мм	20,0	9,0
C	Ширина прямолинейного участка щели, мм	1,0	0,5
D	Диаметр отверстия, мм	10,0	4,8
E	Ширина раскрыва щели, мм	17,0	10,0
F	Смещение питающего полоска по вертикали, мм	8,22	3,8
G	Расстояние до пересечения полоска с щелью, мм	17,5	8,0
H	Ширина горизонтальной части питающего полоска, мм	1,0	0,6
J	Ширина вертикальной части питающего полоска, мм	1,0	0,6
K	Расстояние до центра кругового сектора, мм	8,72	4,0
L	Длина элемента, мм	65,0	30,0
P	Толщина слоев металлизации, мм	50	35
Q	Параметр формы экспоненциального раскрыва, [1/м]	$0{,}3\cdot10^2$	60,0
R	Радиус шлейфа питающего полоска, мм	7,5	5,0
T	Толщина диэлектрической подложки, мм	2,88	1,0

Окончание табл. 8.2

1	2	3	4
W	Ширина элемента, мм	20,0	12,2
φ	Ширина кругового сектора, град	80°	80°
θ	Угол наклона кромки кругового сектора, град	50°	50°
dx	Шаг элементов в решетке, плоскость E, мм	22,88	13,2
dy	Шаг элементов в решетке, плоскость H, мм	22,88	13,2
~	Относительная диэлектрическая проницаемость материала подложки, мм	2,2	3,0

Соответственно для моделирования решетки с бесконечным числом элементов в различных направлениях использовались специальные периодические граничные условия (PBC). Шаг d_x, d_y размещения элементов в плоскостях E и H указан в табл. 8.2 (колонка 3). В колонке 4 указаны параметры для излучателя в составе ФАР (4…12 ГГц).

На рис. 8.7 в качестве примера представлен результат разбиения (пространственной дискретизации) питающей полосковой линии, выполненного в соответствии с методами FEM и FDTD. Рисунко иллюстрирует принципиальное различие в способе формирования пространственной сетки (тетраэдры в FEM и параллелепипеды в FDTD).



а) *б*)

Рис. 8.7. Пример пространственной дискретизации полосковой линии с секториальным шлейфом по методам FEM (*а*) и FDTD (*б*)

Результаты расчета для синфазного возбуждения бесконечной плоской АР показаны на рис. 8.8. Наблюдается хорошее совпадение результатов, полученных методами FEM и FDTD (расхождение не превышает 3 %). Нижняя граница полосы частот, в которой элемент решетки работает как излучатель, составляет 1,2…1,5 ГГц, что подтверждает работоспособность выбранного принципа построения полотна широкополосной сканирующей АР.



Рис. 8.8. Входное сопротивление элемента бесконечной плоской АР с синфазным возбуждением на основе щелевого МНИ

В рамках тестирования методов FEM и FDTD оценивалось влияние границ области моделирования и дискретизации. Так, например, для FEM на частоте 8 ГГц сходимость результатов наблюдается при размерах области моделирования (0,4…0,6)λ в поперечном сечении (стенки параллельны плоскостям E и H) и (0,65…0,75)λ в продольном направлении (стенка параллельна плоскости излучающего раскрыва антенны, см. рис. 8.3), что соответствует воздушному зазору излучатель – область моделирования (0,125…0,2)λ.

Результаты аналогичных расчетов для метода FDTD показаны на рис. 8.9. Зависимость входного сопротивления одиночного излучателя (рис. 8.9,*а*) и излучателя в составе двумерной бесконечной решетки (рис. 8.9,*б*) от частоты для различных размеров области моделирования и шага пространственной сетки. Параметрами кривых являются расстояние до границы области моделирования (для расширенной сетки расстояния увеличены в два раза) и шаг d пространственной сетки. Наблюдаемое различие результатов незначительное, что свидетельствует об устойчивости метода FDTD при прочих параметрах, указанных в табл. 8.1.

Сопоставление зависимостей входного сопротивления одиночного излучателя и излучателя в составе двумерной бесконечной решетки позволяет наглядно объяснить роль взаимного влияния между элементами. Моделируемый элемент на рис. 8.9,*а* – одиночный МНИ (рис. 8.1 с параметрами табл. 8.2, колонка 3) с питанием микрополосковой линией. На частотах до 7 ГГц антенна не излучает, и цепь источника возбуждения замыкается по пути полосковая линия – щелевая линия – короткозамкнутое круговое отверстие в щелевой линии – емкостной шлейф –

общий провод. В связи с этим в окрестности нулевой частоты входное сопротивление МНИ имеет емкостной характер, определяемый емкостью шлейфа (менее 1 пФ). В полосе 0,5…6,0 ГГц частотная зависимость сопротивления является «наложением» частотных зависимостей для составных частей излучателя (полосковая схема питания и неоднородная щелевая линия). Начиная с 7 ГГц добротность резонансов падает, антенна начинает излучать.

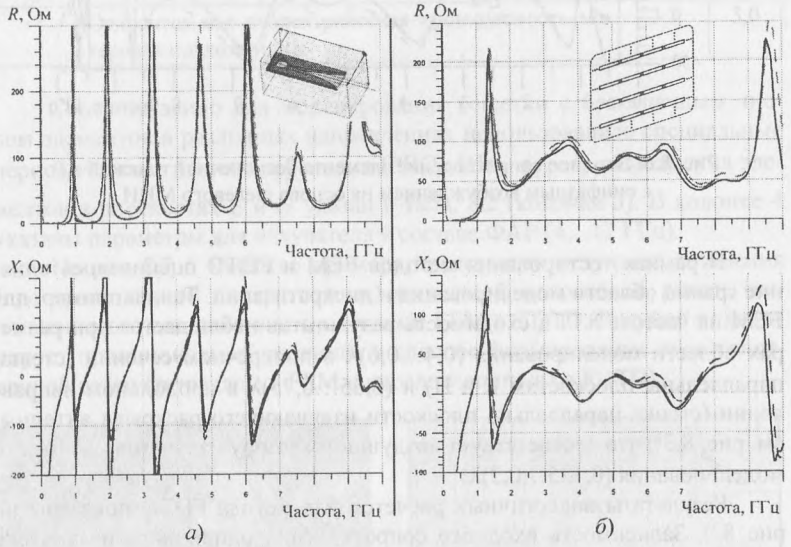


Рис. 8.9. Зависимость входного сопротивления одиночного излучателя (*а*) и излучателя в составе двумерной бесконечной решетки (*б*) от частоты для различных размеров области моделирования и шага пространственной сетки

Расхождение результатов, полученных методами FEM и FDTD, не превышает 1,5 %, что указывает на их достоверность и целесообразность использования обоих методов для расчета МНИ.

8.2. Ресурсоемкость и особенности формирования сетки в процедурах численного моделирования. Схема питания (возбуждения) элемента. Особенности функционирования металлодиэлектрического неоднородного излучателя

Предварительный анализ, проведенный выше, подтвердил принцип, использованный для создания широкополосного антенного полотна и МНИ как базового элемента этого полотна. Однако прежде чем проводить полное моделирование, исследуем ряд вопросов, ориентируясь на требования табл. 8.1: задать базовое антенное полотно и геометрические размеры МНИ (п.п. 8.1.3), обосновать схему питания (возбуждения) элемента, оценить ресурсоемкость и особенности формирования сетки в процедурах численного моделирования для различных моделей АР, выявить особенности функционирования МНИ, что необходимо как для выбора стратегии оптимизации геометрии излучателя и антенного полотна в целом, так и для поиска новых технических решений по совершенствованию характеристик антенного полотна.

Численное моделирование характеристик полотна широкополосной сканирующей АР на основе МНИ проводилось МКЭ (FEM, п.п. 2.1, 2.2) в частотной области и МКРВО (FDTD, п.п. 2.3, 2.4). Проверка осуществляется путем сравнения результатов.

8.2.1. Базовое антенное полотно металлодиэлектрического неоднородного излучателя для полосы 4...12 ГГц

Ориентируясь на табл. 8.1 для проведения расчетов выберем конкретные геометрические размеры с учетом следующих требований: верхняя граничная частота f_B = 12 ГГц при секторе сканировании лучом $\theta_{max} = \pm 45°$, $f_B = 8{,}0$ ГГц при $\theta_{max} = \pm 55°$. Максимальный шаг d_X, d_Y размещения элементов в двумерной АР (см. рис. 8.3) определяется из условия отсутствия паразитных дифракционных максимумов при отклонении луча на максимальный угол θ_{max} в обеих плоскостях (8.1). Значения шага в плоскостях E и H выбраны равными: $d_x = d_y = 13{,}2$ мм.

В качестве материала диэлектрической подложки выбран фольгированный композитный термостабилизированный материал типа RO3003 на основе политетрафторэтилена с керамическим наполнителем. Основные электрические параметры материала приведены в табл. 8.3. Особенно-

сти материала: высокая воспроизводимость основных параметров, низкие потери в диапазоне СВЧ, сравнительно высокая механическая прочность, однородность, пригодность для обработки на стандартном оборудовании по производству печатных плат. Ряд толщин материала RO3003 (мм): 0,13; 0,25; 0,5; 0,75; 1,52; ряд толщин применяемой металлизации медью (мкм): 17; 35; 70.

Таблица 8.3

Параметр	Значение
Относительная диэлектрическая проницаемость (при f = 10 ГГц и t = 23 С°)	3,00±0,04
Тангенс угла диэлектрических потерь	$1{,}3\cdot10^{-3}$
Температурный коэффициент изменения диэлектрической проницаемости, 1/°С	$13\cdot10^{-6}$

Геометрические параметры излучателя указаны в табл. 8.2 (колонка 4), изображение МНИ – рис. 8.10.

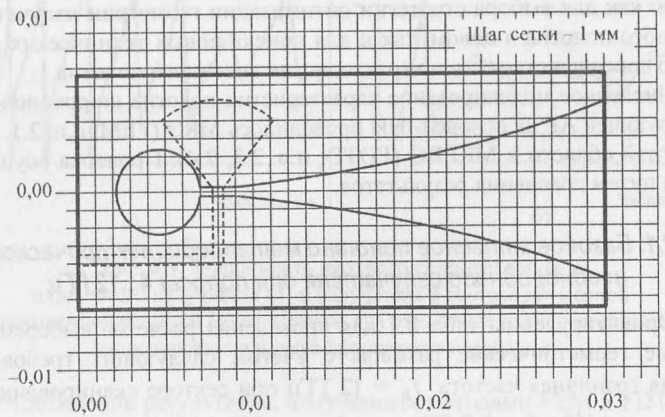


Рис. 8.10. Излучатель для полотна плоской АР

8.2.2. Ресурсоемкость и особенности формирования пространственной сетки

Пространственно-временной метод численного моделирования. Основные сведения о задействованных ресурсах при численном моделировании методом FDTD полотна АР на основе МНИ для основных исследованных моделей указаны в табл. 8.4 (результаты численного моделирования представлены далее в п.п. 8.3–8.8).

Таблица 8.4

Структура решетки[1)]	Базовый шаг сетки[2)]	Число узловых точек щели	Используемый объем ОЗУ, Кбайт	Всего ячеек в пространственной сетке	Длительность расчета (ч:мм:сс)[3)]	Проект[4)]
∞E × ∞H	λ/10	98	478 180	359 160	0:15:16	B003
∞E × 1H	λ/10	98	467 460	356 136	0:09:16	B075
9E × 1H	λ/8	98	1 608 524	1 903 744	1:25:27	B059
11E × 1H	λ/8	98	1 446 296	2 321 472	1:51:28	B061
17E × 1H	λ/8	98	2 053 152	3 574 656	2:43:46	B067
3E × 3H	λ/8	98	992 720	1 545 080	1:00:30	B080
5E × 5H	λ/9	34	565 796[5)] 330 908	1 583 584	0:30:58	B082
7E × 7H	λ/9	34	464 808	3 021 536	0:53:24	B083
9E × 9H	λ/9	34	507 072	3 508 960	1:03:03	B084
13E × 13H	λ/8	34	1 384 248[5)] 874 428	6 286 408	2:42:31	B087
13E × 13H[6)]	λ/8	34	973 116[5)] 292 220	1 572 352	1:03:30	B095
21E × 21H[6)]	λ/8	34	1 860 324[5)] 541 796	4 017 664	2:56:43	B096

[1)] Обозначение вида mE × nH соответствует числу излучателей m и n в плоскостях E и H. Символ бесконечности (∞) указывает, что в данном направлении полотно неограниченно (использованы периодические граничные условия).

[2)] Для частоты 14,0 ГГц (длина волны в свободном пространстве λ = 2,14 см).

[3)] Для ПЭВМ на основе процессора Intel тип P4HT-3ГГц. Длительность расчета на процессоре Intel тип Core2 Duo T6400-2ГГц сокращается в 1,7 раза, на процессоре Intel тип Core2 Quad – в 3,1 раза.

[4)] Условное обозначение, присвоенное проекту.

[5)] Максимальный объем ОЗУ, используемый процедурой формирования сети.

[6)] Для экономии ОЗУ и сокращения продолжительности счета использована симметрия моделируемой структуры относительно плоскостей E и H. Критерий останова – по прошествии фиксированного времени (4,75 нс).

Модель полотна АР наибольших размеров, которую удалось реализовать и успешно проанализировать численно методом FDTD, включала в себя 21×21 элемент (всего 441 элемент, см. далее п. 8.6). Модель заняла в памяти ПЭВМ объем ОЗУ 2 Гбайт; продолжительность однократного расчета (например, для случая отклонения луча АР в одном из направлений) составила 3 ч. При этом для четырехкратного сокращения требуемого объема ОЗУ (с исходных 8 Гбайт до упомянутых 2 Гбайт) и одновременного четырехкратного сокращения продолжительности рас-

чета использовалось свойство геометрической симметрии антенного полотна относительно плоскостей E и H.

Типовые значения параметров дискретизации по пространству для моделей из табл. 8.4 (параметры генерации пространственной сетки) для метода FDTD):

– число разбиений на длину волны, 8;

– число узловых точек, определяющих геометрию щели, 98;

– режим разреженной сетки в однородных областях структуры (subgridding) не задействован;

– основной критерий останова расчета – по прошествии фиксированного времени (1,9 нс).

Влияние указанных типовых параметров дискретизации на ход численного моделирования полотна бесконечной двумерной АР отражено в табл. 8.5. При этом структура пространственной сетки в плоскости размещения щелевого излучателя показана на рис. 8.11. Влияние параметров дискретизации на погрешность расчета полного входного сопротивления излучателя в составе полотна бесконечной АР – на рис. 8.12.

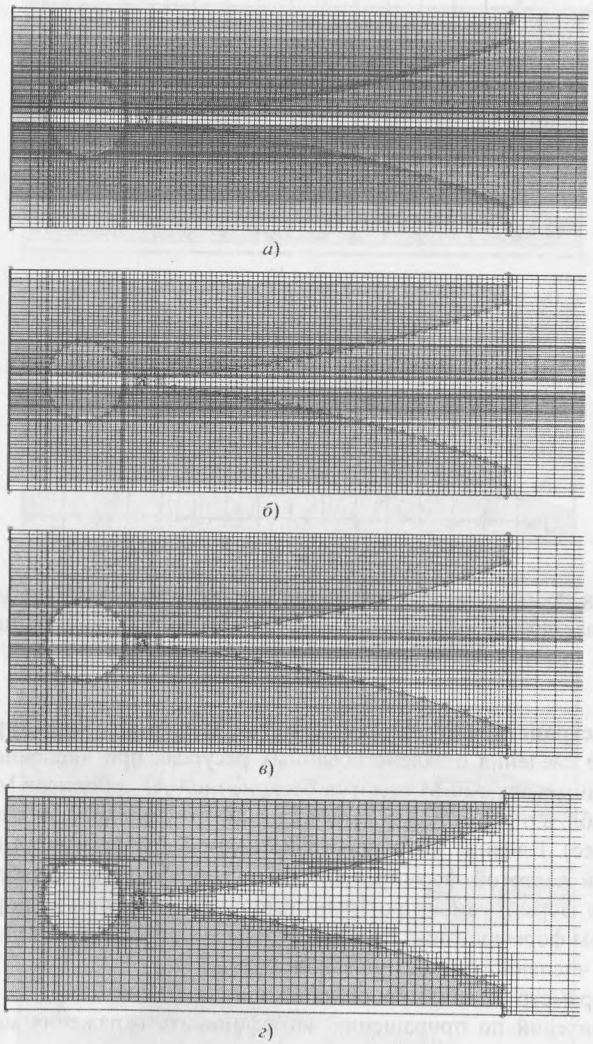
Таблица 8.5

Число узловых точек щели	Разреженная сетка	Всего ячеек в сетке	ОЗУ для расчета матриц, Кбайт	ОЗУ для решения, Кбайт	Длительность расчета проекта, с[1)]	Вид сетки, рис.	Проект[2)]
98	Нет	359 160	267 248	478 180	931	8.11,*а*	B003
53	Нет	220 800	223 936	124 892	296	8.11,*б*	B078
34	Нет	178 200	205 156	117 300	185	8.11,*в*	B079
34	Да	66 970	163 496	165 048	472	8.11,*г*	B081

1) Для ПЭВМ на основе процессора Intel тип P4HT-3ГГц.

2) Условное обозначение проекта.

Данные из табл. 8.5 и незначительный (в среднем – менее 5 %) разброс значений полных сопротивлений, наблюдаемый на рис. 8.12, указывают, что для снижения ресурсоемкости моделирования следует рационально выбирать точность описания геометрии щелевой линии во внешних слоях металлизации излучателя. Иными словами, целесообразно снижать число узловых точек, задающих геометрию щелевого выреза, контролируя при этом точность расчета на тестовой модели. Кроме того, выявлено, что применение комбинированной пространственной сетки с переменным шагом и выделением локальных однородных областей с разреженной сеткой (последняя строка в табл. 8.5 и рис. 8.11,*г*) не позволяет понизить требуемый объем ОЗУ.



а)

б)

в)

г)

Рис. 8.11. К влиянию параметров генерации пространственной сетки:
а – исходный вариант; *б* и *в* – снижение числа узловых точек, задающих геометрию щели; *г* – режим разреженной сетки в однородных областях структуры

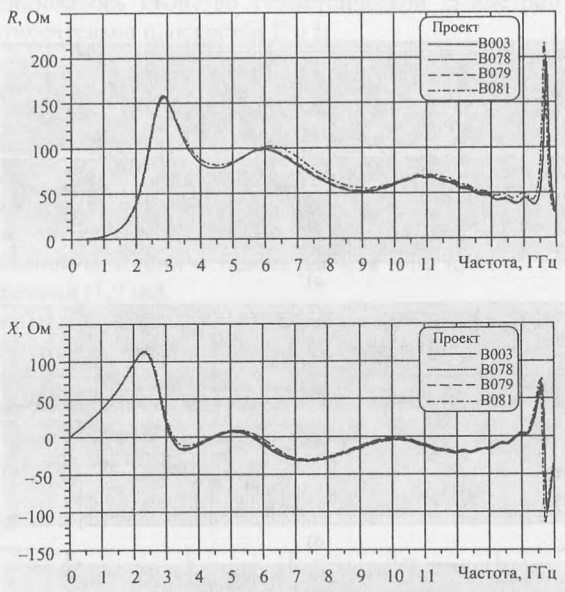


Рис. 8.12. Результаты расчета полного входного сопротивления МНИ в составе полотна двумерной бесконечной АР при различных значениях параметров формирования пространственной сетки

Пространственно-частотный метод численного моделирования. Основные сведения о задействованных ресурсах при численном моделировании методом FEM полотна бесконечной АР на основе МНИ указаны в табл. 8.6 (сами результаты численного моделирования представлены далее). Влияние шага пространственной дискретизации (задается граничной частотой формирования сетки, см. колонку 2 табл. 8.6) на структуру формируемой пространственной сетки показано на рис. 8.13. Параметры формирования пространственной сетки и критерии останова процесса численного моделирования:

– параметр детализации сетки на одну итерацию 20 %;

– критерий по приращению коэффициента отражения между последовательными итерациями 0,02;

– ограничение на минимальное число последовательных удовлетворительных итераций 2;

– минимальное число итераций 5;

– максимальное число итераций 30.

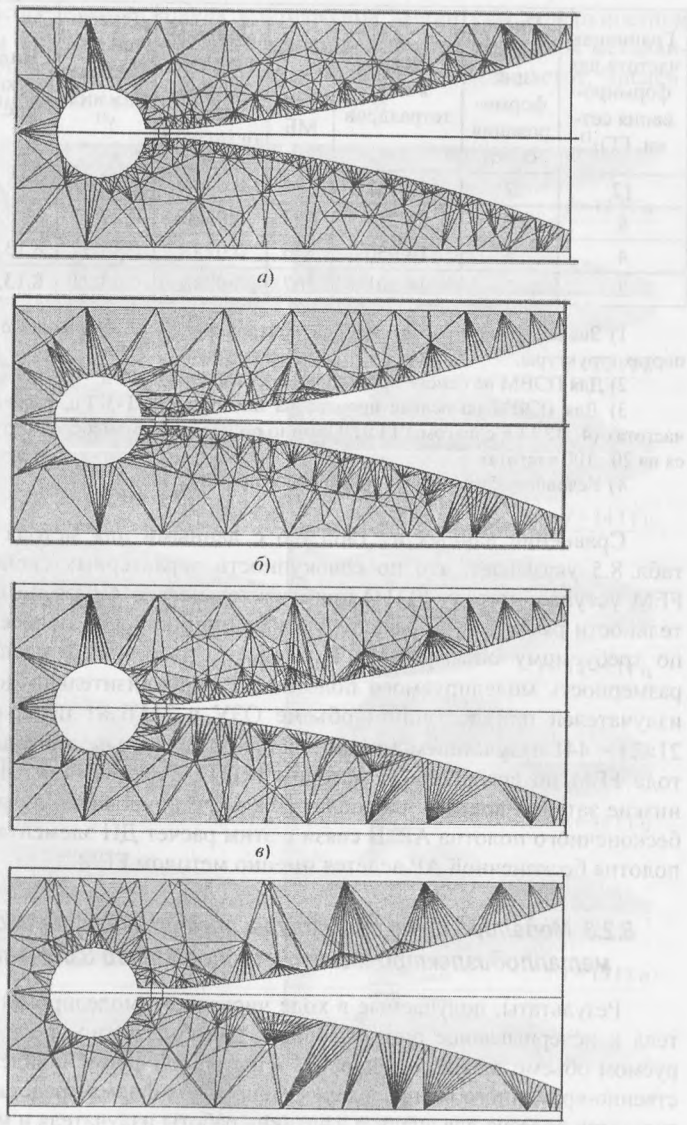


Рис. 8.13. Влияние параметров генерации пространственной сетки

Таблица 8.6

Граничная частота для формирования сетки, ГГц[1)]	Число итераций формирования сетки	Всего ячеек-тетраэдров	Объем ОЗУ, МБ	Длительность генерации сетки (ч:мм:сс)[2)]	Длительность расчета (ч:мм:сс)[3)]	Вид сетки, рис.	Проект[4)]
12	7	26 561	893	0:08:50	0:40:41	8.13,*а*	B049
8	7	21 379	673	0:05:32	0:27:47	8.13,*б*	B050
4	5	14 950	376	0:02:01	0:13:37	8.13,*в*	B051
2	5	14 801	367	0:02:01	0:13:21	8.13,*г*	B052

1) Значение частоты, на которой контролируется коэффициент отражения в портах структуры.

2) Для ПЭВМ на основе процессора Intel тип P4HT-3ГГц.

3) Для ПЭВМ на основе процессора Intel тип P4HT-3ГГц, расчет на девяти частотах (4...12 ГГц с шагом 1 ГГц). Обычно расчет широкополосной структуры велся на 20...100 частотах.

4) Условное обозначение, присвоенное проекту.

Сравнение данных из табл. 8.6 с данными для метода FDTD из табл. 8.5 указывает, что по совокупности характерных свойств метод FEM уступает методу FDTD приблизительно в 2–4 раза по продолжительности расчета (при расчете в выбранной широкой полосе частот) и по требуемому объему ОЗУ. Последнее ограничивает максимальную размерность моделируемого полотна АР (приблизительно до 5×5 = 25 излучателей при доступном объеме ОЗУ в 2 Гбайт по сравнению с 21×21 = 441 излучателем для метода FDTD). Главным достоинством метода FEM по сравнению с методом FDTD является простота и более низкие затраты времени на анализ режима сканирования луча в модели бесконечного полотна АР. В связи с этим расчет ДН элемента в составе полотна бесконечной АР ведется именно методом FEM.

8.2.3. Моделирование структуры электромагнитного поля металлодиэлектрического неоднородного излучателя

Результаты, получаемые в ходе численного моделирования излучателя и исчерпывающе описывающие электромагнитное поле в моделируемом объеме, можно переставить в наглядной форме в виде пространственно-временного распределения поля. Такая форма представления результатов полезна для анализа «физики» работы излучателя и может быть использована как для выбора стратегии оптимизации геометрии излучателя и антенного полотна в целом, так и для поиска новых технических решений по совершенствованию характеристик антенного полотна.

Распределение поверхностной плотности тока. На рис. 8.14 показано распределение модуля комплексной амплитуды поверхностной плотности электрического тока на внешней поверхности слоя металлизации МНИ в составе полотна бесконечной АР для ряда частот. Численное моделирование выполнено методом FEM.

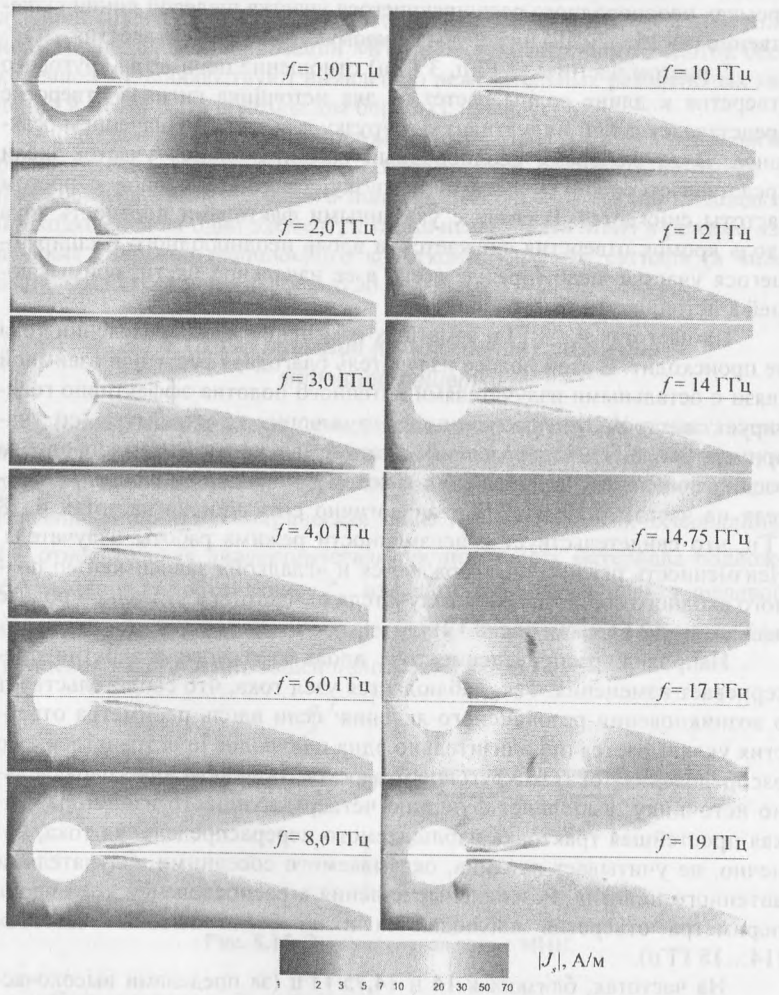


Рис. 8.14. Распределение модуля комплексной амплитуды поверхностной плотности тока J_s на внешней стороне слоя металлизации МНИ в составе антенного полотна бесконечной АР

На частоте 1 ГГц, находящейся существенно ниже низкочастотной границы рабочей полосы частот антенного полотна, ток сконцентрирован в районе кругового отверстия: периметр отверстия (менее 1 см) мал по сравнению с длиной волны (~30 см), и отверстие представляет собой для источника РЧ-сигнала короткое замыкание. Плотность тока на кромках неоднородного расширяющегося участка щелевой линии существенно (на 15…20 дБ) ниже, чем на кромках кругового отверстия.

С ростом частоты (2 ГГц, 3 ГГц) отношение периметра кругового отверстия к длине волны растет, и для источника сигнала отверстие представляет собой индуктивную нагрузку с растущим значением реактанса. В то же время неоднородный расширяющийся участок щели представляет собой емкостную нагрузку, реактанс которой с ростом частоты снижается. В связи с указанными факторами плотность тока вдоль кромок отверстия снижается, а вдоль неоднородного расширяющегося участка щели (прежде всего в ее начальной части, примыкающей к источнику) – быстро растет.

На частотах 4…8 ГГц заметных изменений в распределении тока не происходит. В этой полосе излучатель благодаря растущей взаимной связи с остальными излучателями антенного полотна эффективно генерирует электромагнитные волны в окружающее пространство (см., например, рис. 8.12). Распределение плотности тока вдоль неоднородного расширяющегося участка щели и в целом в «правой половине» излучателя на частотах 10 и 12 ГГц аналогично ситуации на частотах 4…8 ГГц, что свидетельствует о неизменности режима работы излучателя. Неизменность режима подтверждается и «гладкой» зависимостью полного входного сопротивления излучателя от частоты в указанной полосе частот (4…12 ГГц, см. рис. 8.12).

Напротив, распределение тока вдоль кругового отверстия претерпевает изменения. Так, наблюдается узел тока, что свидетельствует о возникновении резонансного явления: если вдоль периметра отверстия укладывается приблизительно одна полуволна пространственного распределения тока, то круговое отверстие, подключенное параллельно источнику, выполняет функцию четвертьволнового изолятора. Такая простейшая трактовка наблюдаемого перераспределения тока, конечно, не учитывает влияния, оказываемого соседними излучателями антенного полотна. Резонансные явления в распределении тока вдоль периметра отверстия наблюдаются и на более высоких частотах (14…18 ГГц).

На частотах, близких к 14 и 14,75 ГГц (за пределами высокочастотной границы рабочей полосы частот), наблюдается паразитное резонансное явление, состоящее в «растекании» тока от кромок щелевого излучателя по всей поверхности металлизации. Возникновение паразитного резонанса подтверждается и зависимостью входного сопротивления излучателя от частоты (см., например, рис. 8.12, резонанс вблизи 14,75 ГГц). Вероятная причина резонанса связана с тем, что расширяющаяся щелевая линия перестает канализировать ток столь высокой частоты. Распределение плотности тока на частотах 17 и 19 ГГц соответствует резонансам более высокого порядка.

Таким образом, результаты численного моделирования и последующий анализ распределения поверхностной плотности тока по внешней стороне слоя металлизации МНИ в составе антенного полотна бесконечной АР способствуют выявлению нежелательных резонансных явлений и могут быть полезны для борьбы с ними.

Для понимания особенностей работы МНИ можно представить распределение действительной составляющей вектора Пойнтинга в плоскости раскрыва антенного полотна бесконечной АР по площадке, приходящейся на один элемент, а также исследовать МНИ в режиме излучения сверхширокополосного короткоимпульсного сигнала (в виде импульса Гаусса длительностью 50 пс – см. п.п. 4.2.4).

8.2.4. Схема питания (возбуждения) элемента антенной решетки

Эквивалентная схема цепи питания щелевого МНИ представлена на рис. 8.15 и включает в себя последовательно соединенные питающую полосковую линию (параметры однородной линии – волновое сопротивление линии ρ и электрическая длина $l_э = l\sqrt{\varepsilon}$, l – физическая длина, ε – относительная диэлектрическая проницаемость материала подложки), входное сопротивление $\dot{Z}_и$ излучателя (расширяющейся щелевой линии и закорачивающего отверстия) и сопротивление $\dot{Z}_ш$ шлейфа (концевой нагрузки питающей полосковой линии).

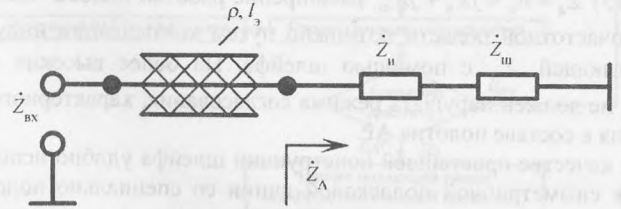


Рис. 8.15. Эквивалентная схема МНИ

Сопротивление $\dot{Z}_и$ определяется при возбуждении излучателя в зазоре щелевой линии, как это показано, например, на рис. 8.10. Сопротивление $\dot{Z}_и$ излучателя в составе АР определяется как геометрией

одиночного излучателя, так и геометрией размещения элементов в решетке и амплитудно-фазовым распределением (АФР) (в частности, углом сканирования).

Сопротивление $\dot{Z}_{ш}$ шлейфа и трансформирующие свойства отрезка питающей линии не зависят от АФР, поскольку эти элементы конструкции экранированы внешними слоями металлизации излучателя. В связи с этим численное моделирование указанных элементов схемы питания можно вести отдельно от излучателя и впоследствии объединить с результатами расчета излучателя в соответствии с эквивалентной схемой на рис. 8.15.

В целом расчет излучателя, включая анализ или оптимизацию (в том числе, см. гл. 7) входного сопротивления $\dot{Z}_{вх}$ и качества согласования, можно вести в порядке, показанном на рис. 8.16.

Критерий качества широкополосного согласования при расчете схемы питания можно учитывать с помощью следующих критериев: усредненный уровень коэффициента стоячей волны (КСВ) или аналогичной характеристики в рабочей полосе частот; максимальный уровень КСВ в полосе частот; значение низшей частоты, на которой выполняется требование к уровню КСВ; отклонение входного сопротивления или аналогичной характеристики от номинального на фиксированной частоте при различных углах сканирования.

Влияние шлейфа на входное сопротивление антенного элемента. В ходе предварительного моделирования было выявлено, что ширина рабочей полосы частот излучателя в составе полотна АР ограничена снизу как снижением активной составляющей $R_{и}$ входного сопротивления излучателя, так и влиянием реактивной составляющей $X_{и}$ индуктивного характера. В соответствии с эквивалентной схемой (см. рис. 8.15) $\dot{Z}_{а} = R_{и} + jX_{и} + jX_{ш}$ расширение рабочей полосы частот МНИ в низкочастотной области возможно путем компенсации индуктивной составляющей $X_{и}$ с помощью шлейфа. На более высоких частотах шлейф не должен нарушать режима согласования, характерного для излучателя в составе полотна АР.

В качестве простейшей конструкции шлейфа удобно использовать отрезок симметричной полосковой линии со специально подобранной длиной и волновым сопротивлением, в том числе неоднородный. Удачные конструкции шлейфов показаны на рис. 8.6. Для ускорения расчета излучателя в соответствии с алгоритмом на рис. 8.16 была создана база данных входных сопротивлений для шлейфов круговой (рис. 8.6,*б*, параметр – радиус R) и секториальной (рис. 8.6,*а*, параметры R и φ, $\theta = (180° - \varphi)/2$) форм для различных значений R и φ. В качестве примера на рис. 8.17,*а* показана частотная зависимость $X_{ш}$ для кругового шлейфа при радиусе окружности в пределах 0,5…2,5 мм. У шлейфа с R = 2,5 мм на частоте 4,9 ГГц наблюдается первый резонанс ($X_{ш}$ =0).

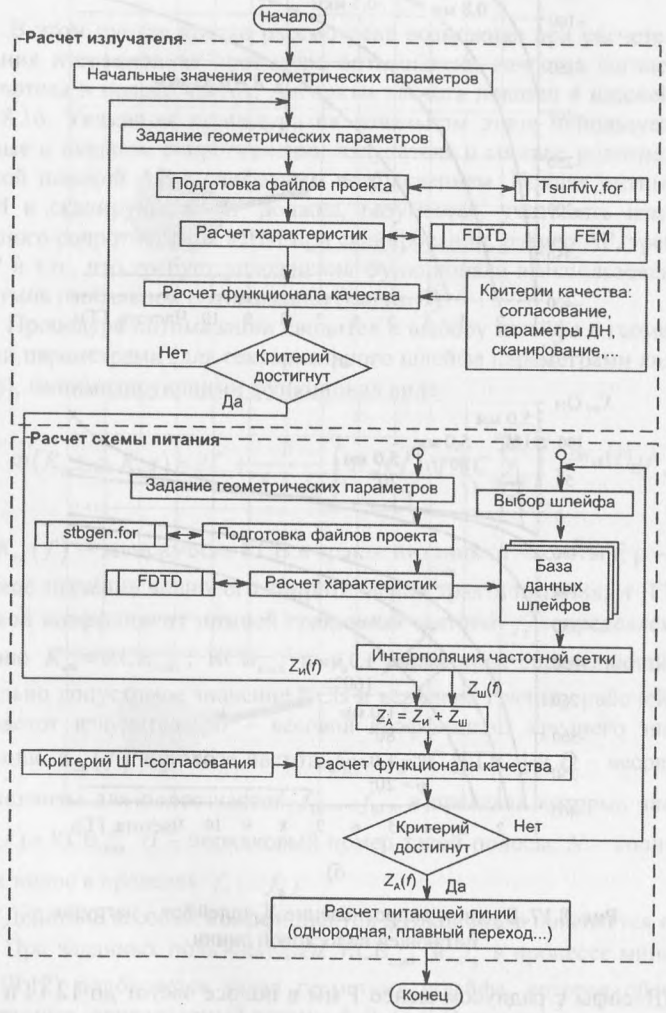
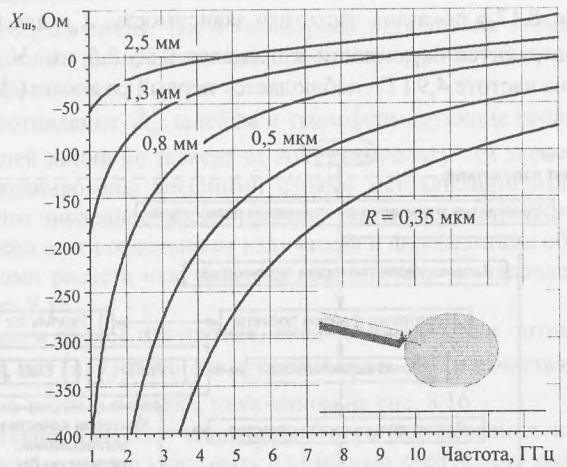
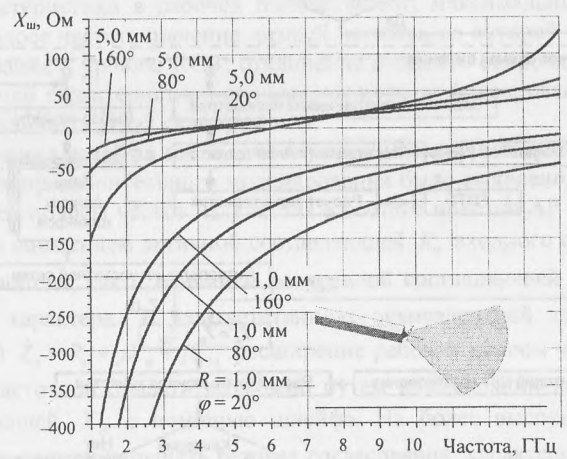


Рис. 8.16. Порядок расчета излучателя для модели полотна бесконечной АР



а)



б)

Рис. 8.17. Входное сопротивление $X_ш$ шлейфов – нагрузок питающей полосковой линии

Шлейфы с радиусом менее 1 мм в полосе частот до 12 ГГц резонансов не имеют ($X_ш$ <0). На рис. 8.16,*б* показаны аналогичные зависимости для секториальных шлейфов с R = 1 и 5 мм и углами секторов φ = 20, 80 и 160°. Принципиального различия в форме зависимостей не наблюдается, в связи с чем при выборе типа шлейфа можно руководствоваться исключительно конструктивными соображениями (в частности, удобством размещения шлейфа во внутреннем слое металлизации).

8.2.5. Оптимизация схемы питания

В этом пункте кратко рассмотрена возможная при расчете схемы питания итерационная процедура оптимизации качества согласования излучателя в полосе частот. Алгоритм расчета показан в нижней части рис. 8.16. Указанная процедура на начальном этапе использует лишь данные о входном сопротивлении излучателя в составе полотна бесконечной плоской АР с синфазным возбуждением. Полная оптимизация МНИ в сканирующей АР должна, разумеется, учитывать изменение входного сопротивления МНИ при сканировании, размер АР, требуемое АФР и т.п., что требует усложнения функционала и использования алгоритмов глобальной оптимизации (см. гл. 7).

Процедура оптимизации сводится к выбору шлейфа с геометрическими параметрами (для секториального шлейфа параметрами являются R и φ), минимизирующими функционал вида

$$\Phi\left(K_{св};\ \rho, R, \varphi\right) = Af_н + \frac{B}{f_в - f_н}\int_{f_н}^{f_в} K_{св}\left(f\right)\mathrm{d}f + C\sum_{i=1}^{N}\int_{f_{нi}}^{f_{вi}} e^{DK_{св}(f)}\mathrm{d}f\ , \quad (8.12)$$

где $K_{св}\left(f\right)$ – зависимость КСВ в тракте питания от частоты f; ρ – номинальное значение волнового сопротивления тракта питания; A [ГГц$^{-1}$] – весовой коэффициент нижней граничной частоты f_i, определяемой по уровню $K_{св} = \text{КСВ}_{max}$; КСВ_{max} и $f_в$ – параметры, определяющие максимально допустимое значение КСВ и верхнюю границу рабочей полосы частот излучателя; B – весовой коэффициент среднего значения функции $K_{св}\left(f\right)$ в полосе частот $f_н \ldots f_в$; C [ГГц$^{-1}$] и D – весовые коэффициенты для полос частот $f_{вi} \ldots f_{нi}$, в пределах которых значение $K_{св}\left(f\right) > \text{КСВ}_{max}$ (i – порядковый номер такой полосы, N – количество таких полос в пределах $f_н \ldots f_в$).

Действие весовых коэффициентов функционала поясняется на рис. 8.18. При заданных пользователем КСВ_{max} и $f_в$ в процессе минимизации (8.12) подбирается такая геометрия шлейфа, которая обеспечит компромисс, определяемый весами A, B, C, и D, между:

– шириной рабочей полосы частот излучателя, ограниченной для МНИ снизу значением $f_н$ – первое слагаемое формулы (8.12);

– средним в полосе частот значением КСВ – второе слагаемое (8.12);

– числом и размером «выбросов» $K_{св}(f)$ – третье слагаемое формулы (8.12).

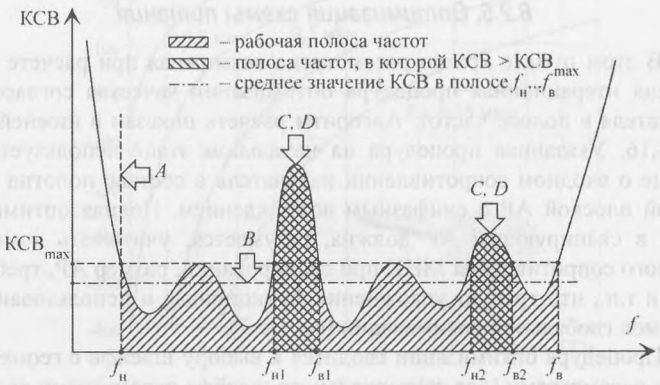


Рис. 8.18. К действию весовых коэффициентов функционала

На рис. 8.19,*а*,*б* представлены частотные зависимости соответственно КСВ и реактанса $X_а$ антенного элемента для случаев:

– пунктирная линия – непосредственного питания излучателя в зазоре щелевой линии ($X_а = X_и$);

- сплошная линия – питания с помощью полосковой линии с концевой нагрузкой-шлейфом ($X_а = X_и + X_ш$) с оптимальными (минимизирующими функционала (8.12)) геометрическими параметрами;

– штриховая линия – шлейф с геометрией, близкой к оптимальной.

Для излучателя, показанного на рис. 8.1, значения геометрических параметров шлейфа, минимизирующие функционал (8.2) при ρ = 50 Ом, A = 10,0 ГГц$^{-1}$, B = 1,0, C = 4,0 ГГц$^{-1}$, D = 1,3, $КСВ_{max}$ = 2,0 и $f_в$ = 12,0 ГГц составили: R = 5,00 мм, φ = 80,0°.

Для указанного оптимального шлейфа на рис. 8.19,*а* штрихпунктирной линией изорбражена частотная зависимость КСВ в тракте питания с иным волновым сопротивлением (ρ = 81 Ом), при котором функционал (8.12) принимает наименьшее значение. Однако для перехода от стандартного волнового сопротивления ρ = 50 Ом к ρ = 81 Ом потребуется спроектировать соответствующий широкополосный трансформатор сопротивлений (последняя операция алгоритма на рис. 8.16).

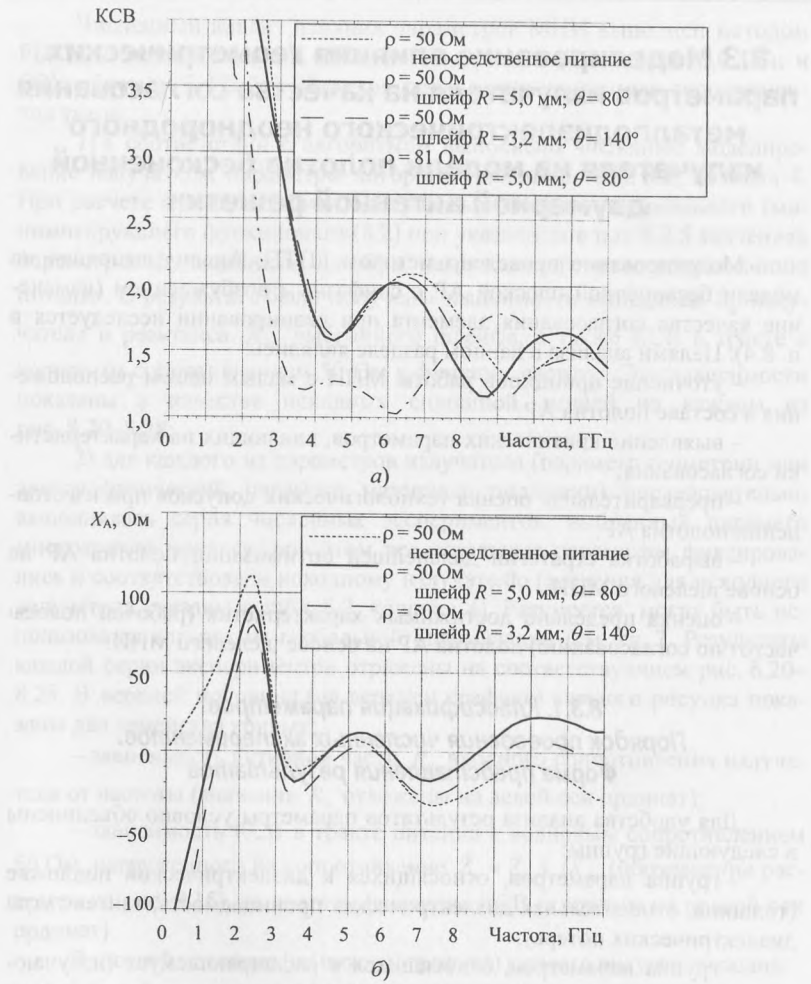


Рис. 8.19. КСВ (*а*) и реактанс (*б*) излучателя при различных параметрах схемы питания

8.3 Моделирование влияния геометрических параметров излучателя на качество согласования металлодиэлектрического неоднородного излучателя на модели полотна бесконечной двумерной антенной решетки

Моделирование проведено методом FDTD. Анализ выполнен на модели бесконечной плоской АР с синфазным возбуждением (изменение качества согласования элемента при сканировании исследуется в п. 8.4). Целями анализа в данном разделе являлись:

– уточнение принципов работы МНИ с малым шагом расположения в составе полотна АР;

– выявление критических параметров, влияющих на характеристики согласования;

– предварительная оценка технологических допусков при изготовлении полотна АР;

– выработка стратегии дальнейшей оптимизации полотна АР на основе щелевого МНИ;

– оценка предельно достижимых характеристик (рабочей полосы частот по согласованию) полотна АР на основе щелевого МНИ.

8.3.1. Классификация параметров. Порядок проведения численных экспериментов. Форма представления результатов

Для удобства анализа результатов параметры условно объединены в следующие группы:

– группа параметров, относящихся к диэлектрической подложке (толщина, относительная диэлектрическая проницаемость, тангенс угла диэлектрических потерь);

– группа параметров, относящихся к расширяющемуся (излучающему) участку щелевой линии (длина, ширина раскрыва, параметр кривизны и т.п.);

– группа параметров, относящихся к месту подведения питания (длина и ширина однородного участка щелевой линии, диаметр и местоположение кругового отверстия, местоположение точки питания на щелевой линии);

– группа параметров, относящихся к геометрии полотна АР (шаг расположения элементов в плоскостях E и H, расстояние между металлическим экраном АР и МНИ).

Численный анализ влияния параметров МНИ выполнен методом FDTD, с использованием ЦПУ P4HT с тактовой частотой 3,0 ГГц и ОЗУ объемом 3 Гбайт). Порядок проведения численных экспериментов таков:

1) в соответствии с алгоритмом выполнено численное моделирование излучателя, параметры которого указаны в табл. 8.2, колонка 4. При расчете схемы питания подбиралась геометрия оптимального (минимизирующего функционала (8.2) при указанных в п.п. 8.2.5 значениях параметров функционала) шлейфа, нагружающего полосковую линию питания. В результате были получены зависимости импеданса $\dot{Z}_{и}$ излучателя и реактанса $X_{ш}$ выбранного шлейфа, а также КСВ в тракте с волновым сопротивлением 50 Ом в функции частоты. Эти зависимости показаны в качестве исходных сплошной линией на каждом из рис. 8.20–8.28;

2) для каждого из параметров излучателя (параметр геометрии или электрофизический параметр материала подложки) последовательно выполнялась серия численных экспериментов: выбранный параметр многократно менялся, при этом все остальные параметры фиксировались и соответствовали исходному излучателю (значения для исходного излучателя указаны в табл. 8.2, колонка 4). Разумеется, могут быть использованы алгоритмы глобальной оптимизации (см. гл. 7. Результаты каждой серии экспериментов отражены на соответствующем рис. 8.20–8.28. В верхней половине (на верхнем графике) каждого рисунка показаны два семейства кривых:

– зависимость активной части $R_{и}$ входного сопротивления излучателя от частоты (значения $R_{и}$ отложены на левой оси ординат);

– зависимость КСВ в тракте питания с волновым сопротивлением 50 Ом, нагруженного на сопротивление $\dot{Z}_{а} = \dot{Z}_{и} + jX_{ш}$ (обозначения раскрыты на рис. 8.15), от частоты (значения КСВ отложены на правой оси ординат).

В нижней половине (на нижнем графике) каждого рисунка показаны:

– семейство зависимостей реактивной части $X_{и}$ входного сопротивления излучателя от частоты;

– зависимость реактанса $X_{ш}$ оптимального (критерии оптимальности изложены в п. 4.4.3) секториального шлейфа с параметрами $R = 5{,}0$ мм, $\varphi = 80°$, $\theta = 50°$ (обозначения раскрыты на рис. 8.6), нагружающего питающую полосковую линию.

Все буквенные обозначения геометрических параметров на рис. 8.20–8.28 соответствуют указанным на эскизе излучателя, показанном на рис. 8.1. Линейные размеры указаны в миллиметрах.

8.3.2. Влияние параметров диэлектрической подложки

Увеличение толщины t подложки (см. рис. 8.20) приводит в среднем к снижению $R_и$ и к перемещению рабочей полосы частот целиком в более низкочастотную область. Снижение $R_и$ и уменьшение нижней границы частотного диапазона связано с увеличением погонной емкости щелевой линии и, как следствие, со снижением волнового сопротивления линии и увеличением электрической длины излучателя.

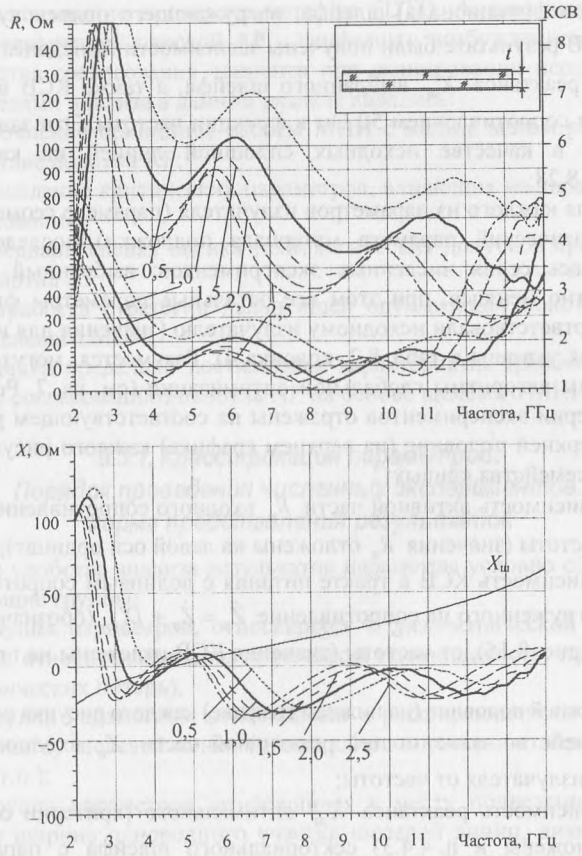


Рис. 8.20. Влияние толщины подложки

Влияние на входное сопротивление излучателя относительной диэлектрической проницаемости ε материала подложки (рис. 8.21) во многом аналогично влиянию толщины подложки: увеличение ε приводит к

более сильному «втягиванию» волны в подложку, в результате чего фазовая скорость и волновое сопротивление щелевой линии снижаются.

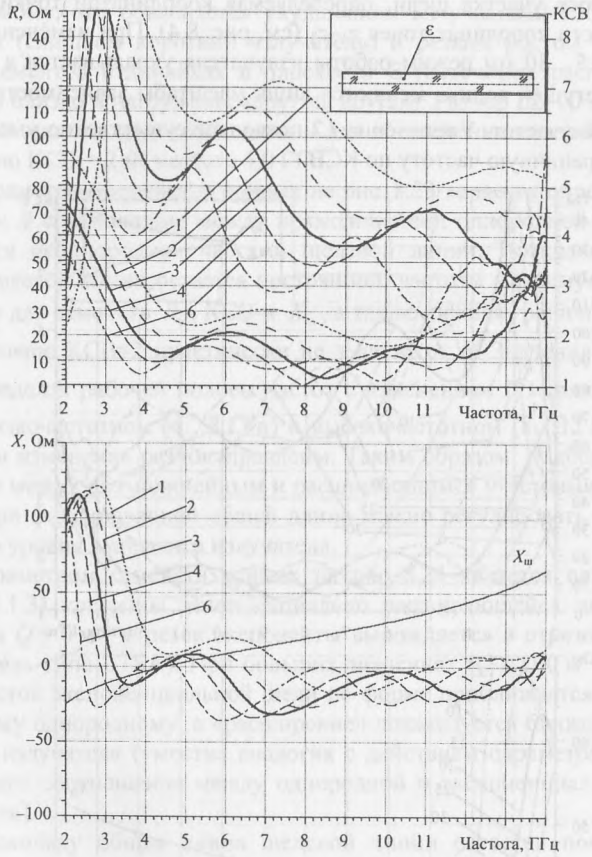


Рис. 8.21. Влияние относительной диэлектрической проницаемости материала подложки

Совместный анализ зависимостей КСВ на рис. 8.20 и 8.21 позволяет сделать вывод о том, что выбор подложки с $t = 1$ мм и $\varepsilon = 3{,}0$ для указанной в табл. 8.2 (колонка 4) геометрии антенны близок к оптимальному.

Влияние диэлектрических потерь в подложке на входное сопротивление незначительно в широком диапазоне значений tgδ, что, по-видимому, связано с малостью размеров излучателя и, как следствие, малой длиной пути, проходимой электромагнитной волной в диэлектрике.

8.3.3. Влияние параметров расширяющейся щели

Параметром семейства кривых на рис. 8.22 является длина $L2$ расширяющегося участка щели, определяемая координатой точки z_4 при неизменности координат точек z_1–z_3 (см. рис. 8.4). При изменении $L2$ в пределах 15…30 мм режим работы излучателя укладывается в модель антенны бегущей волны: меняются лишь масштабы зависимостей $R_и$ и $X_и$ вдоль оси частот. Увеличение $L2$ позволяет существенно уменьшить нижнюю граничную частоту по КСВ.

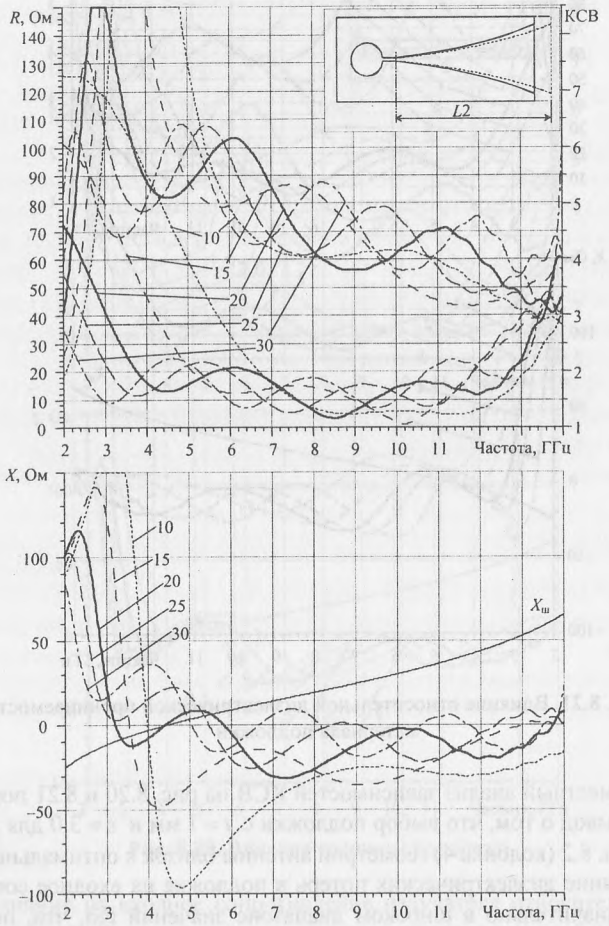


Рис. 8.22. Влияние длины $L2$ расширяющегося участка щели (общая длина L излучателя – переменная)

При сокращении $L2$ до 10 мм (пунктирная линия) наблюдается качественное изменение в режиме работы излучателя: осцилляции (квазирезонансы) импеданса сглаживаются, добротность излучателя падает. По-видимому, это объясняется ухудшением излучающей способности элемента (слишком короткий излучатель) и резким ростом взаимной связи элементов в линейках в плоскости E (источники расположены слишком близко и нагружены «друг на друга»). Размер $L2$~20 мм следует считать минимально необходимым для обеспечения нижней границы по уровню КСВ = 2 на частоте 4,0 ГГц.

Параметром семейства кривых на рис. 8.23 является определяемое размером B соотношение между прямолинейной однородной и расширяющейся неоднородной частями щелевой линии. Поскольку общая длина щелевой линии остается постоянной, частоты максимумов и минимумов для семейств $R_и$, КСВ и $X_и$, а также нижняя граничная частота по уровню КСВ=2 практически не зависят от B. Значения же $R_и$ и $X_и$ в пределах рабочей полосы частот с изменением B меняются, причем в низкочастотном (4…8 ГГц) и высокочастотном (8…12 ГГц) участках эти изменения разнонаправлены. Таким образом, подбором соотношения между прямолинейным и расширяющимся участками щелевой линии при фиксированной общей длине можно регулировать «наклон» среднего уровня импеданса излучателя.

Параметром семейств кривых на рис. 8.24 является параметр Q (см. п. 8.1.3) кривизны экспоненциально расширяющейся щели. При значении $Q = 0$ м$^{-1}$ отрезок экспоненты вырождается в отрезок прямой (излучатель типа LTSA). При больших значениях ($Q > 100$ м$^{-1}$) начальный участок экспоненциальной щели по форме приближается к прямолинейному однородному, а «расширение» локализуется ближе к правой границе излучателя (уместна аналогия с действием параметра B, регулирующего соотношение между однородной и экспоненциальной частями щели).

Поскольку общая длина щелевой линии остается постоянной, частоты максимумов и минимумов для семейств $R_и$, КСВ и $X_и$ практически не зависят от Q. Антенна LTSA ($Q = 0$ м$^{-1}$, пунктирная линия) обладает наихудшими характеристиками согласования в низкочастотной области рабочей полосы частот. Излучатели с более плавным профилем имеют более низкую граничную частоту по уровню КСВ = 2 и вместе с тем более сильные осцилляции КСВ в пределах рабочей полосы частот. Анализ хода зависимостей КСВ на рис. 8.24 свидетельствует о том, что выбор профиля с параметром кривизны $Q = 60$ м$^{-1}$ для указанной в табл. 8.2 (колонка 4) геометрии излучателя близок к оптимальному.

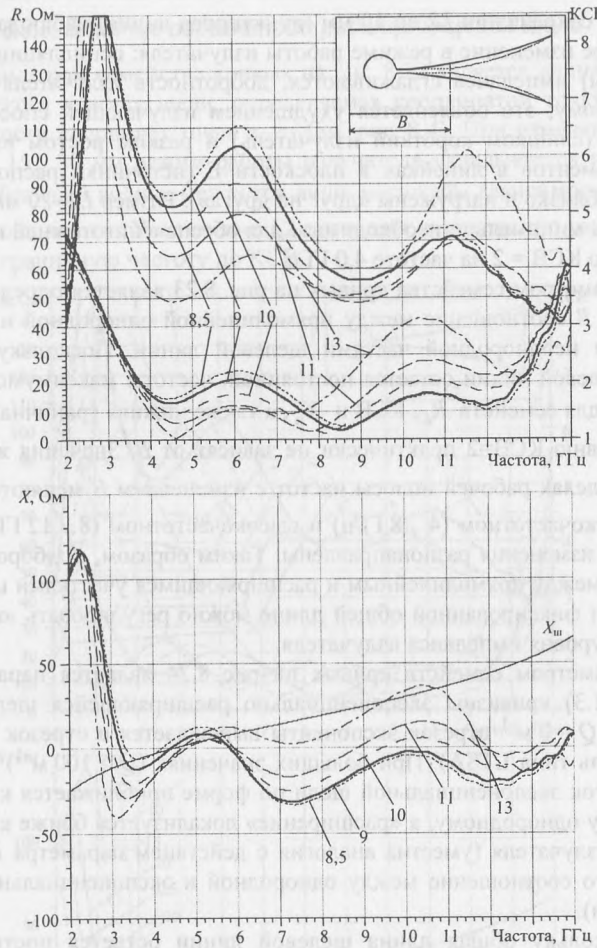


Рис. 8.23. Влияние длины (L–B) расширяющегося участка щели при фиксированной длине L излучателя

Ширина раскрыва щели E (рис. 8.25) в значительной мере влияет на отражение распространяющейся вдоль щелевой линии волны от раскрыва щели и в связи с этим определяет режим работы щелевой линии. Так, при малых значениях E наблюдается слабое излучение, режим стоячей волны и высокодобротные резонансы. При бо́льших значениях E – интенсивное излучение, переход к режиму бегущей волны и апериодическому характеру $\dot{Z}_и$.

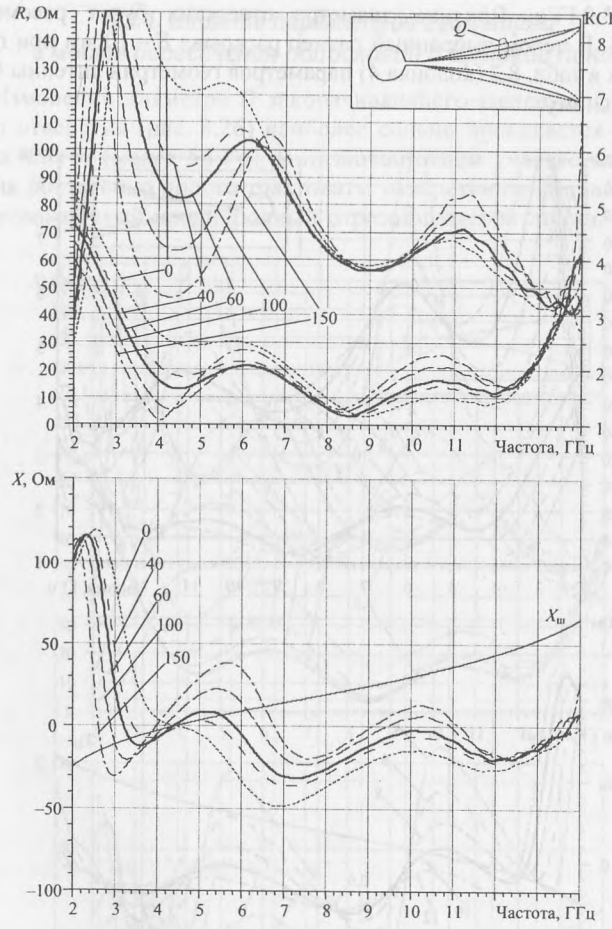


Рис. 8.24. Влияние параметра Q кривизны щели

Однако в низкочастотной области (2…3 ГГц, т.е. за пределами рабочей полосы частот) увеличение E приводит к прямо противоположному явлению: $R_и$ и $X_и$ возрастают. Наиболее вероятной причиной этого явления может быть несбалансированный рост взаимной связи между элементами АР по двум каналам: через излучение раскрыва щели и второго пути взаимной связи – через излучение закорачивающего противоположный конец щели кругового отверстия. Этого оказывается недостаточно для сглаживания резонансного подъема $\dot{Z}_и$ в окрестности

частоты 3,0 ГГц. Влияние диаметра отверстия будет рассмотрено в п.п 8.3.4. В целом выбранный размер раскрыва $E = 10$ мм при прочих указанных в табл. 8.2 (колонка 4) параметров геометрии антенны близок к оптимальному.

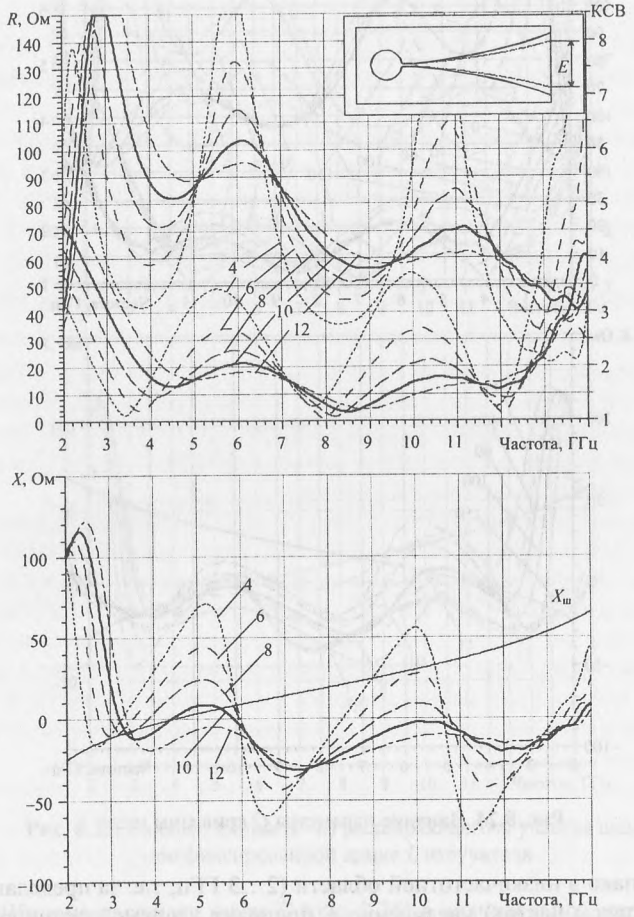


Рис. 8.25. Влияние ширины E раскрыва щели при фиксированной ширине W излучателя

8.3.4. Влияние параметров геометрии в месте пересечения полосковой и щелевой линий

Изменение диаметра D закорачивающего щелевую линию кругового отверстия (рис. 8.26) наиболее сильно проявляется в области низких частот (менее 5 ГГц). В низкочастотном участке влияние отверстия достаточно просто трактовать: отверстие представляет собой короткозамкнутый неоднородный отрезок щелевой линии, имеющий

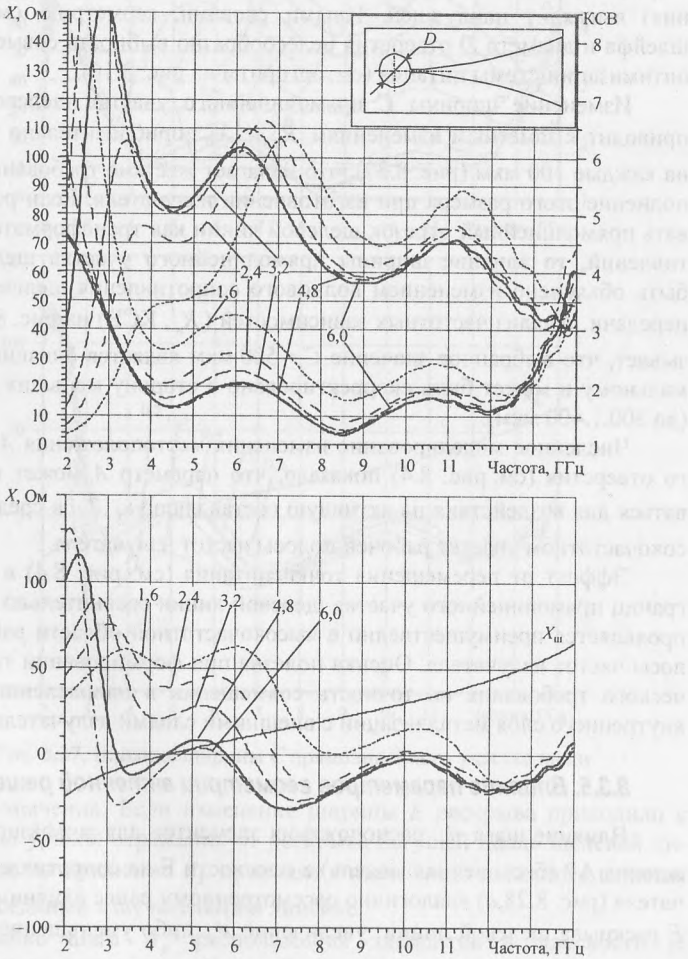


Рис. 8.26. Влияние диаметра D кругового отверстия

при $f \to 0$ или $D \to 0$ реактанс индуктивного характера. Этот элемент щелевой линии шунтирует $\dot{Z}_{и}$. Соответственно уменьшение D ведет к уменьшению $R_{и}$ и $X_{и}$, что и наблюдается на участке 2...5 ГГц на рис. 8.26.

Возрастание КСВ на участке 2...5 ГГц связано с «перекомпенсацией» $X_{и}$ сопротивлением $X_{ш}$ шлейфа емкостного характера, оптимизированным для значения $D = 4{,}8$ мм. Именно этим объясняется то, что на рис. 8.26 зависимость КСВ от частоты для $D = 4{,}8$ мм (сплошная линия) выглядит наилучшей. Иными словами, геометрию емкостного шлейфа и диаметр D отверстия целесообразно выбирать совместно при оптимизации схемы питания (см. алгоритм на рис. 8.16).

Изменение ширины C прямолинейного участка щелевой линии приводит к заметным изменениям $R_{и}$ и $X_{и}$: приблизительно на 10 Ом на каждые 100 мкм (рис. 8.27), что налагает жесткие требования на выполнение этого размера при изготовлении излучателя. Если рассматривать прямолинейный отрезок щелевой линии как трансформатор сопротивлений, то влияние ширины прямолинейного участка щели может быть объяснено изменением волнового сопротивления щелевой линии передачи. Анализ частотных зависимостей ($R_{и}$, КСВ) на рис. 8.27 показывает, что выбранное значение $C = 500$ мкм является близким к оптимальному и может быть скорректировано в сторону меньших значений (до 300...400 мкм).

Численное моделирование изменения местоположения A кругового отверстия (см. рис. 8.4) показало, что параметр A может использоваться для воздействия на активную составляющую $\dot{Z}_{и}$ в средне- и высокочастотном участке рабочей полосы частот излучателя.

Эффект от перемещения точки питания (см. рис. 8.4) в пределах границ прямолинейного участка щелевой линии сравнительно слабый и проявляется преимущественно в высокочастотной области рабочей полосы частот излучателя. Оценка полезна при формировании технологического требования на точность совмещения в направлении оси OZ внутреннего слоя металлизации с внешними слоями излучателя.

8.3.5. Влияние параметров геометрии антенной решетки

Влияние шага d_x расположения элементов для синфазного возбуждения АР (бесконечная модель) в плоскости E на сопротивление излучателя (рис. 8.28,*а*) аналогично рассмотренному ранее влиянию ширины E раскрыва щелевой линии: увеличение d_x либо уменьшение E приводит к росту уровня осцилляций $R_{и}$ и $X_{и}$ относительно некоторого

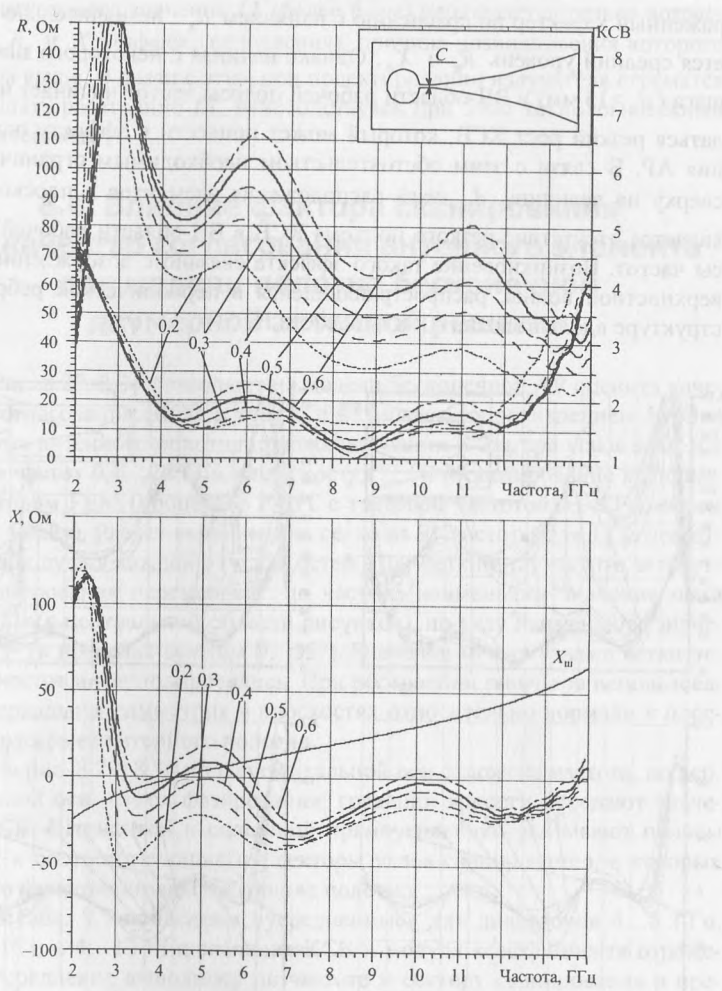


Рис. 8.27. Влияние ширины C прямолинейного участка щели

среднего значения. Если изменение ширины E раскрыва приводило к изменению уровня отражения от раскрыва бегущей вдоль щелевой линии волны, то изменение d_x приводит к изменению взаимного влияния между соседними излучателями в линейке.

Влияние шага d_y расположения элементов в плоскости H (рис. 8.28,*б*) на характеристики согласования носит не столь сильно вы-

раженный характер по сравнению с влиянием d_x: незначительно меняется средний уровень $R_и$ и $X_и$. Однако начиная с некоторого значения шага (d_y>15 мм) в ВЧ-области рабочей полосы частот начинает наблюдаться резкий рост КСВ, который может привести к эффекту ослепления АР. В связи с этим обстоятельством необходимым ограничением сверху на величину d_y шага расположения элементов в плоскости Н является отсутствие резкого подъема КСВ в ВЧ-области рабочей полосы частот. Возникновение такого эффекта связано с возбуждением поверхностной волны, распространяющейся в периодической ребристой структуре вдоль полотна АР в плоскости Н.

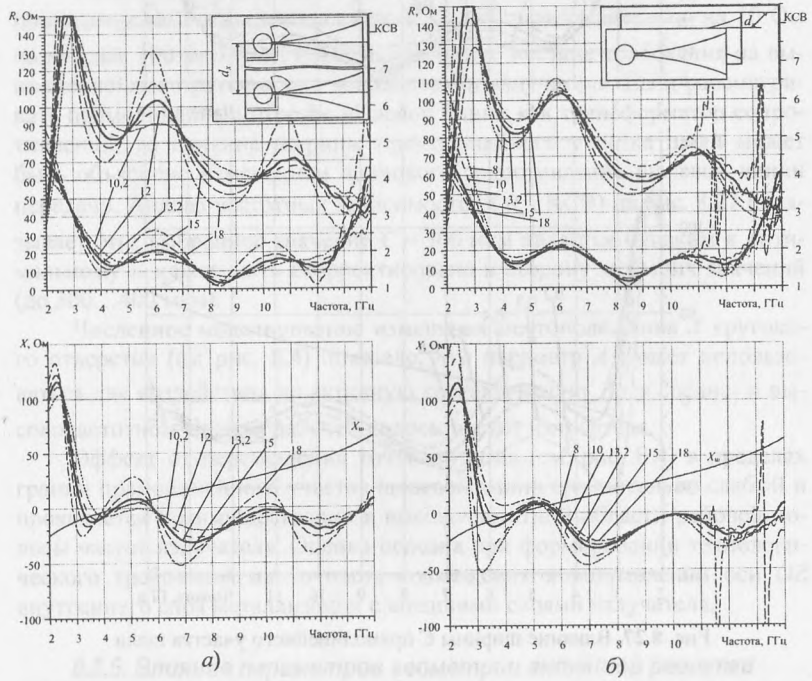


Рис. 8.28. Влияние шага d_x расположения элементов АР в плоскости Е (*а*) и d_y в плоскости Н (*б*)

Расстояния $L1$ от излучателя до плоскости металлического экрана АР на сопротивление $R_и$ и $X_и$ по своему проявлению сходно с влиянием шага d_y: незначительно меняется средний уровень $R_и$ и $X_и$, а начиная с некоторого значения $L1$ (более 6 мм) наблюдается резкое возрастание $R_и$ и $X_и$ (эффект ослепления), причина возникновения которого указана выше. В связи с этим при проектировании излучателя стремятся уменьшать расстояние $L1$, руководствуясь при этом технологическими ограничениями.

8.4. Влияние фактора сканирования на качество согласования антенного элемента для модели полотна бесконечной двумерной антенной решетки

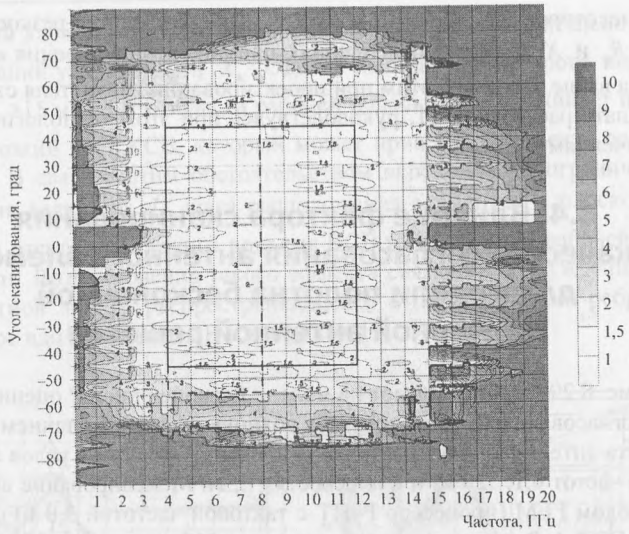
Рис. 8.29–8.34 позволяют на модели бесконечной АР оценить качество согласования (КСВ в тракте с волновым сопротивлением 50 Ом) элемента антенного полотна при сканировании в секторе углов ±90° и в полосе частот 0,1…20 ГГц в плоскостях Е, Н. Моделирование выполнено методом FEM (процессор P4HT с тактовой частотой 3,0 ГГц, объем ОЗУ 3 Гбайт). Расчет выполнен на сетке из 91 частоты для 13 углов отклонения луча в каждой из плоскостей. Шаг сетки и по частоте, и по углу сканирования переменный: по частоте наименьшее значение шага 250 МГц (в центральной области рисунков), по углу наименьшее значение 7,5° (в пределах сектора 0…55°). Значения между узлами сетки углов и частот интерполировались. При построении рисунков использовалась зеркальная симметрия в плоскостях относительно нормали к плоскости раскрыва антенного полотна.

На рис. 8.29, 8.30 по горизонтальной оси отложена частота, по вертикальной оси – угол фазирования; градации яркости передают значения КСВ. Штриховой и сплошной прямоугольники указывают полосы частот и соответствующие им секторы углов сканирования, в которых должно функционировать антенное полотно.

В табл. 8.7 приведены «усредненные» для диапазонов 4…8 ГГц, 8…12 ГГц и 4…12 ГГц значения КСВ и модуля коэффициента отражения. Усреднение выполнено по частоте и сектору сканирования в пределах областей, ограниченных прямоугольниками на рис. 8.29, 8.30.

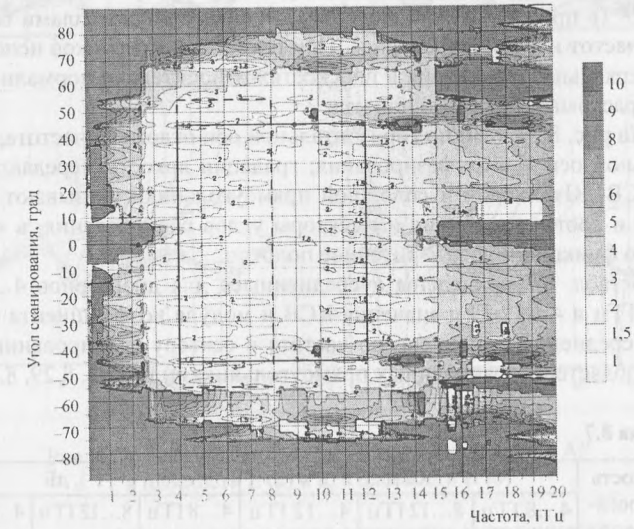
Таблица 8.7

Плоскость сканирования	КСВ			|Г|, дБ		
	4…8 ГГц	8…12 ГГц	4…12 ГГц	4…8 ГГц	8…12 ГГц	4…12 ГГц
Е	1,96	1,56	1,78	–9,83	–13,0	–11,0
Н	1,95	1,71	1,84	–9,82	–11,5	–10,5



Границы областей: — — — 4…8 ГГц, ±55°; ——— 4…12 ГГц, ±45°

Рис. 8.29. КСВ в 50-омном тракте излучателя в полосе частот при сканировании в плоскости Е

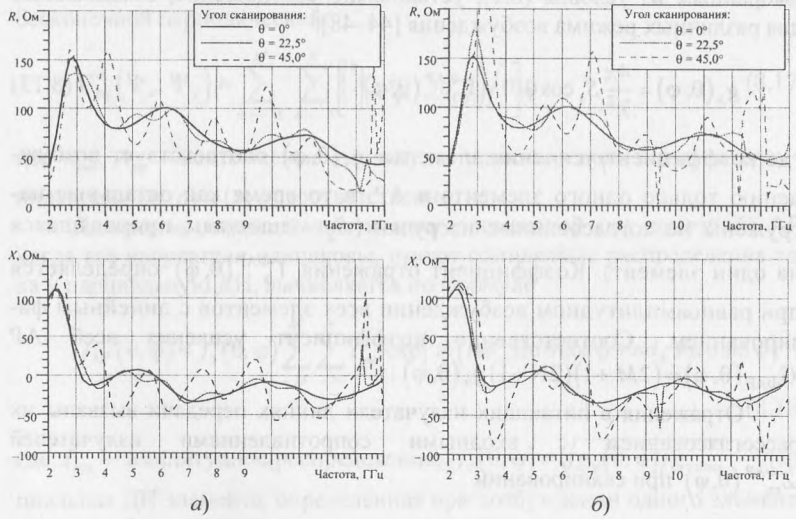


Границы областей: — — — 4…8 ГГц, ±55°; ——— 4…12 ГГц, ±45°

Рис. 8.30. КСВ в 50-омном тракте излучателя в полосе частот при сканировании в плоскости Н

Результаты, представленные на рис. 8.29, 8.30 и в табл. 8.7 позволяет утверждать, что в среднем качество согласования удовлетворительное: в рабочей полосе частот значение КСВ не превышает 2,0. Возможно дальнейшее улучшение качества согласования путем оптимизации геометрических параметров МНИ в составе антенного полотна.

Частотная зависимость полного входного сопротивления $Z_{и} = R_{и} + jX_{и}$ МНИ в составе антенного полотна бесконечной плоской АР для ряда углов сканирования (0; 22,5; 45,0°) показана на рис. 8.31,*а* (плоскость сканирования Е), 8.31,*б* (плоскость сканирования Н). Вариации входного сопротивления излучателя для всех планируемых углов сканирования и значений частот (полос частот) должны учитываться при формулировании требований к средству формирования АФР (приемо-передающим модулям).



а) *б*)

Рис. 8.31. Зависимость входного сопротивления излучателя антенного полотна бесконечной плоской АР от частоты для различных углов сканирования θ

8.5. Парциальная диаграмма направленности и коэффициент усиления антенного элемента на модели бесконечной антенной решетки

Прямое моделирование антенного полотна конечной АР ограничивается доступными вычислительными ресурсами. В то же время основные характеристики антенного полотна сканирующей широкополосной АР

конечных размеров могут быть получены с использованием результатов моделирования бесконечной. Благодаря введению специальных периодических граничных условий ресурсоемкость моделирования бесконечной АР (бесконечной линейной и бесконечной двумерной плоской АР) совпадает с ресурсоемкостью модели одиночного МНИ (см. табл. 8.4, а также табл. 8.5).

Для принятых условий (сектор сканирования ±55° в полосе частот 4:1) модель бесконечной широкополосной антенной решетки можно использовать для оценки характеристик конечной, если апертура последней на любой частоте рабочего диапазона не менее $4\lambda \times 4\lambda$ (40×40=1600 элементов). Это заключение находится в соответствии с 10×10=100-элементной узкополосной АР.

Для бесконечных периодических АР с шагом между элементами, выбранным из условия (8.1), установлено соотношение, связывающее два различных режима возбуждения [44–48]:

$$g_э(\theta,\varphi)=\frac{4\pi}{\lambda^2}S_э\cos\theta\left[1-\left|\Gamma_э^{ФАР}(\theta,\varphi)\right|^2\right], \qquad (8.13)$$

где коэффициент усиления элемента $g_э(\theta,\varphi)$ соответствует возбуждению только одного элемента в АР, в то время как остальные нагружены на согласованные нагрузки ($S_э$ – площадь, приходящаяся на один элемент). Коэффициент отражения $\Gamma_э^{ФАР}(\theta,\varphi)$ определяется при равноамплитудном возбуждении всех элементов с линейным фазированием. Соответственно коэффициент усиления всей АР $G_{ФАР}(\theta,\varphi)=(2M+1)(2N+1)g_э(\theta,\varphi)$.

Отражения в питающих излучатели линиях передачи вызваны их рассогласованием с входными сопротивлениями излучателей $Z_{вх}^{ФАР}(\theta,\varphi)$ при сканировании

$$\Gamma_э^{ФАР}(\theta,\varphi)=\frac{Z_{вх}^{ФАР}(\theta,\varphi)-\rho_0}{Z_{вх}^{ФАР}(\theta,\varphi)+\rho_0}, \qquad (8.14)$$

где ρ_0 – волновое сопротивление линии передачи.

Полученные результаты можно использовать для оценки характеристик многоэлементных (но конечных) ФАР. Действительно, определив на модели антенного полотна бесконечной сканирующей АР $Z_{вх}^{ФАР}(\theta,\varphi)$, $\Gamma_э^{ФАР}(\theta,\varphi)$, далее можно найти коэффициенты взаимной связи между элементами в бесконечной АР. Вследствие периодичности возбуждения

$$\Gamma_э^{ФАР}(\Psi_x,\Psi_y)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{s}_{mn}\exp\left[-i\left(m\Psi_x+n\Psi_y\right)\right], \qquad (8.15)$$

где $\dot{s}_{mn}=\dot{s}_{mn,00}$ имеют смысл коэффициентов взаимной связи (элементов матрицы рассеяния) между центральным (возбуждаемым) элементом (0, 0) и элементом с номером (m, n). Тогда

$$\dot{s}_{mn}=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Gamma_э^{ФАР}(\Psi_x,\Psi_y)\exp i\left(m\Psi_x+n\Psi_y\right)d\Psi_x d\Psi_x. \qquad (8.16)$$

Определив из равенства (8.16) коэффициенты $\dot{s}_{mn}$, находят коэффициенты отражения в любом излучателе (p, q) конечной АР с произвольным возбуждением, полагая, что конечная решетка дополнена до бесконечной периодической

$$\Gamma_{pq}^{\infty}(\Psi_x,\Psi_y)=\sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=-N}^{N}\left(A_{mn}\dot{s}_{|m-p|,|n-q|}\right)\Big/A_{pq}, \qquad (8.17)$$

где A_{mn}, A_{pq} – комплексные амплитуды падающих волн в излучателях с индексами (m, n) и (p, q) соответственно.

Диаграмма направленности многоэлементной (но конечной) АР, когда все излучатели одинаковы, имеют одинаковые распределения тока и парциальную ДН, вычисляется по формуле

$$f_{АР}(\theta,\varphi)=f_э(\theta,\varphi)\sum_{-M}^{M}\sum_{-N}^{N}\dot{I}_{mn}\exp\left[ik\left(md_x\sin\theta\cos\varphi+nd_y\sin\theta\sin\varphi\right)\right], \qquad (8.18)$$

где $\dot{I}_{mn}$ – амплитудное распределение, $f_э(\theta,\varphi)=\sqrt{g_э(\theta,\varphi)/g_{эmax}}$ – парциальная ДН элемента, определенная при возбуждении одного элемента в составе бесконечной периодической ФАР при условии, что остальные нагружены на согласованные нагрузки (выражение (8.13)).

8.5.1. Парциальная диаграмма направленности элемента

Методика расчета ДН элемента, реализованная в настоящем пункте, основана на моделировании антенного полотна бесконечной периодической АР, регистрации коэффициента отражения (от входа излучателя) на различных частотах и для различных углов сканирования (углов фазирования источников, возбуждающих антенное полотно бесконечной АР) и последующей связи с парциальной диаграммой направленности элемента (выражение (8.13)).

На рис. 8.32 представлены результаты расчета ДН элемента антенного полотна плоской бесконечной АР, полученные с использованием метода FEM. Представлены результаты для отдельных частот в полосе 2,0…16 ГГц в плоскости Е (сплошная линия), в плоскости Н (штриховая линия) и в диагональной плоскости (штрихпунктирная линия).

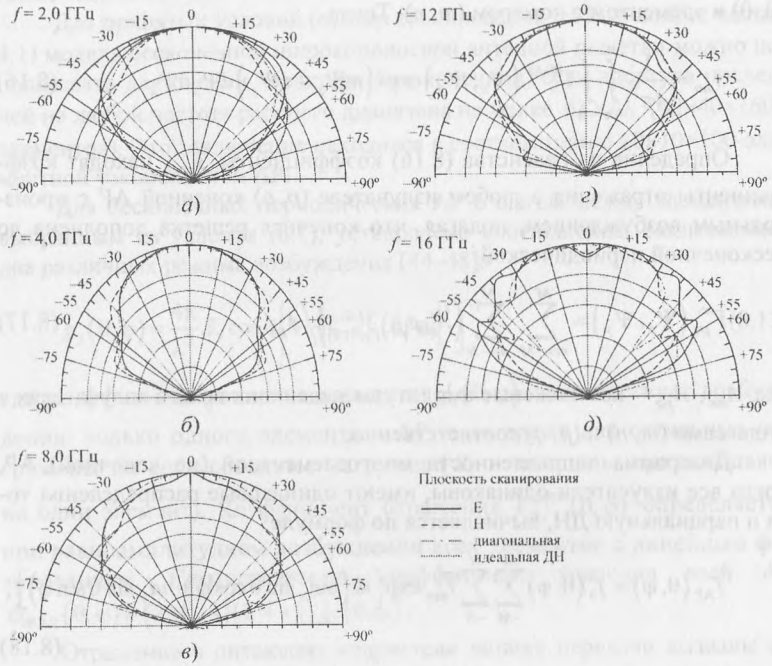


Рис. 8.32. Нормированная ДН по полю МНИ для модели плоской бесконечной АР

В рабочей полосе частот (4,0…12 ГГц) ДН элемента во всех плоскостях симметричные. В рабочем секторе сканирования (±55°) ДН элемента характеризуются умеренными осцилляциями (менее 1 дБ). Ширина ДН элемента по уровню –3 дБ в полосе 4,0…8,0 ГГц составляет ±55°, в полосе 4,0…12 ГГц – не менее ±45°.

8.5.2. Коэффициент усиления

На рис. 8.33 представлены результаты расчета зависимости КУ элемента антенного полотна бесконечной плоской АР от частоты для различных углов: по нормали к плоскости раскрыва антенного полотна

(максимальный КУ, сплошная линия); для предельных углов –45° (штриховая линия) и 55° (штрихпунктирная линия) в плоскости Е.

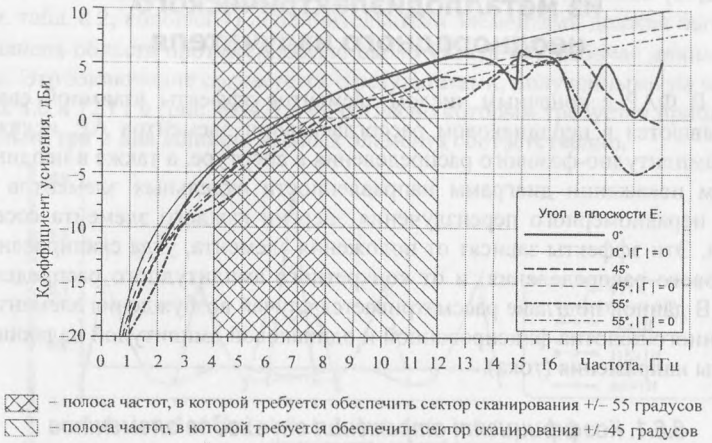


Рис. 8.33. Зависимость КУ от частоты для МНИ на модели плоской бесконечной АР

В низкочастотной области рабочей полосы частот (4,0…6,5 ГГц) КУ мал, что связано с электрически малым (по отношению к рабочей длине волны) шагом размещения излучателей в антенном полотне (выбор шага обеспечивает компромисс между требованиями широкополосности антенного полотна и отсутствием дифракционных лепестков в ДН). Иными словами, невысокий КУ в полосе частот 4,0…6,5 ГГц вызван не ухудшением условий согласования элемента, а спецификой построения широкополосного полотна. В высокочастотной области рабочей полосы частот (8,0…12 ГГц) КУ близок к +3 дБ, что связано с электрически малыми габаритными размерами излучающего раскрыва неоднородного расширяющегося участка щелевой линии (аналогичный КНД имеет одиночный изотропный излучатель над металлическим экраном). За пределами высокочастотной границы рабочей полосы частот наблюдаются существенные отклонения КУ реального излучателя от «идеально согласованного», что связано с возникновением паразитных резонансных явлений в антенном полотне).

8.6. Характеристики полотна конечных антенных решеток из металлодиэлектрического неоднородного излучателя

В ФАР с конечным числом элементов эффекты взаимной связи сказываются в неодинаковом рассогласовании элементов АР, искажении амплитудно-фазового распределения в апертуре, а также в неодинаковом искажении диаграмм направленности отдельных элементов за счет неравномерного переизлучения энергии каждого элемента соседними. Эти эффекты зависят от положения элемента, угла сканирования (фазового распределения) и от конкретного амплитудного распределения. В данной подглаве рассматривается случай возбуждения элементов антенного полотна фиксированной и одинаковой амплитудой падающей волны напряжения (тока).

8.6.1. Коэффициент отражения от входов элементов

Моделирование выполнено методом FDTD (см. табл. 8.4). На рис. 8.34–8.36 по оси ординат отложено значение модуля коэффициента отражения, по оси абсцисс – номер элемента в антенном полотне (элемент № 0 – центральный). Каждая из ломаных линий соединяет точки, соответствующие коэффициенту отражения конкретного элемента антенного полотна одной из конфигураций, указанных на врезке в верхнем правом углу рисунка. Обозначение «nE × mH» на врезке означает, что антенное полотно образовано n элементами в плоскости E и m элементами в плоскости H. В частности, антенное полотно с конфигурацией nE × 1H представляет собой линейку из n излучателей в плоскости E; ∞E × 1H – бесконечную линейку элементов в плоскости E (на рис. 8.34 этому полотну соответствует сплошная линия с маркерами в виде точки •); ∞E × ∞H – антенное полотно бесконечной двумерной плоской АР.

Линейная антенная решетка. Результаты моделирования представлены на рис. 8.34. В низкочастотной части рабочей полосы частот (на частоте 4,0 ГГц, рис. 8.34,*а*) коэффициенты отражения для каждого из МНИ малоэлементных линеек (трех- и пятиэлементной) существенно различаются между собой, а также существенно отличаются от коэффициента отражения элементов бесконечной линейки. Напротив, центральная группа элементов линеек больших размеров (11- и 19-элементных) по качеству согласования приближается к линейке с бесконечным числом элементов.

На частоте 4,0 ГГц режим работы элемента антенного полотна линейной АР с конечным числом элементов приближается к режиму работы элемента бесконечной линейной АР при условии, что элемент окружен с обеих сторон, по крайней мере, шестью дополнительными элементами. С учетом шага размещения элементов в линейке (13,2 мм, см. табл. 8.2, колонка 4) дополнительными элементами должна быть заполнена область протяженностью около 1λ, где λ – рабочая длина волны. Это заключение согласуется с результатами, полученными на частотах 8.0 и 12 ГГц (рис. 8.34,*б* и *в*), согласно которым требуется приблизительно три и два дополнительных элемента соответственно.

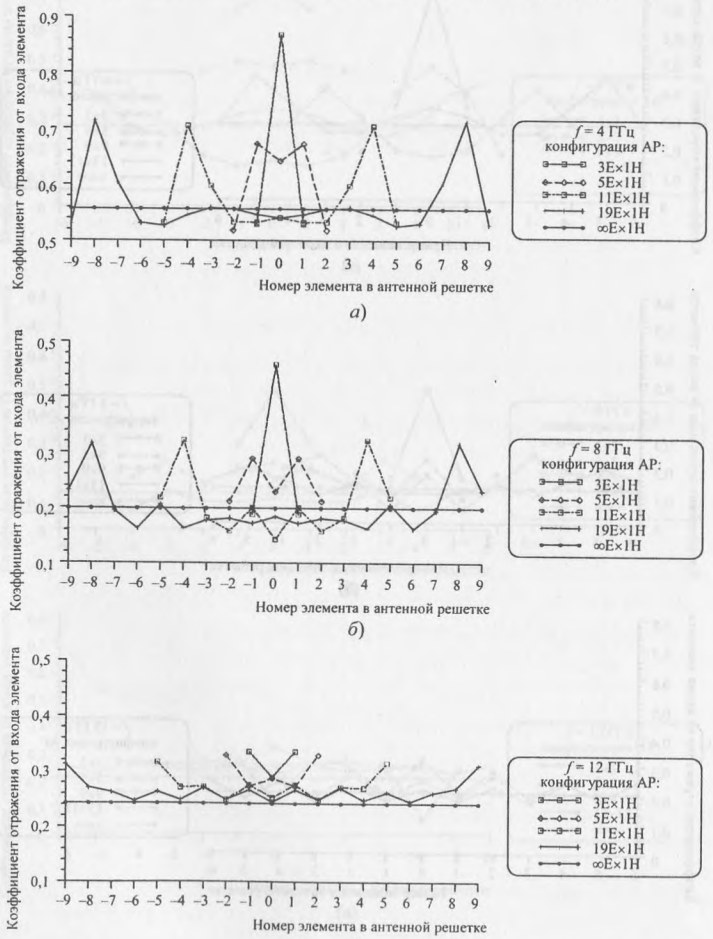


Рис. 8.34. Качество согласования элементов антенного полотна линейной АР: *а* – 4,0 ГГц; *б* – 8,0 ГГц; *в* – 12 ГГц

Двумерная квадратная антенная решетка. Результаты моделирования представлены на рис. 8.35, 8.36 для элементов линеек в составе антенного полотна, содержащих центральный элемент и лежащих в плоскостях E, H. По оси абсцисс отложен номер элемента, отсчитываемый в соответствующем направлении (E, H), начиная от центрального элемента (№ 0); сплошной линией с маркерами в виде точки • отмечены

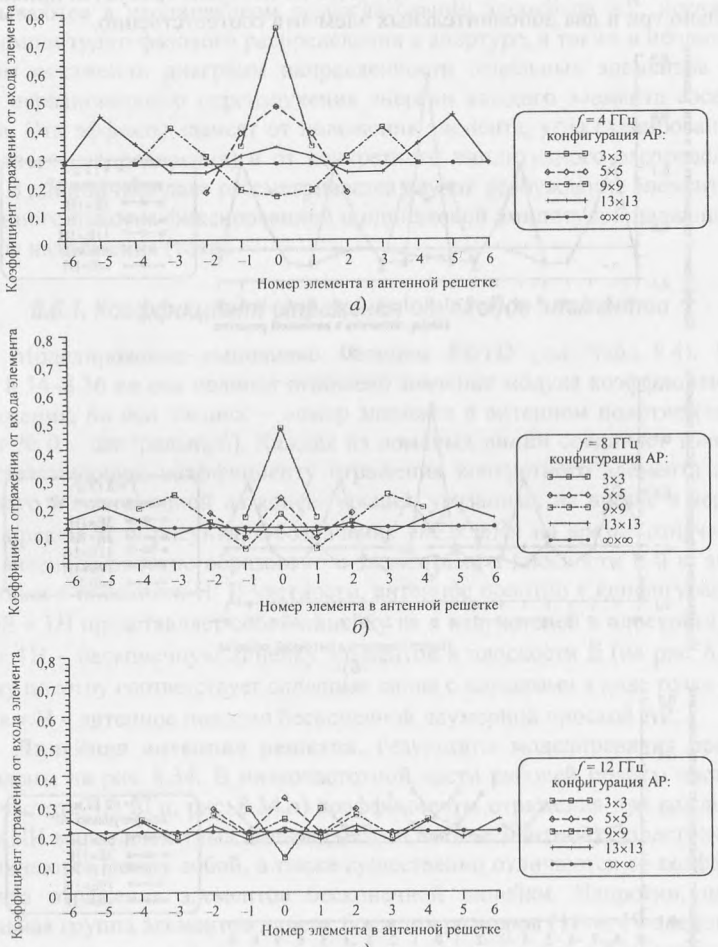


Рис. 8.35. Качество согласования элементов антенного полотна квадратной АР в главной линейке в плоскости E:
а – 4,0 ГГц; *б* – 8,0 ГГц; *в* – 12 ГГц

результаты для элемента в составе антенного полотна бесконечной двумерной АР (конфигурация типа ∞E × ∞H).

Сравнение результатов на рис. 8.35 и 8.36 показывает, что различие в качестве согласования между элементами одиночной линейки и антенным полотном плоской АР незначительное (и в центральной, и в периферийных областях антенного полотна).

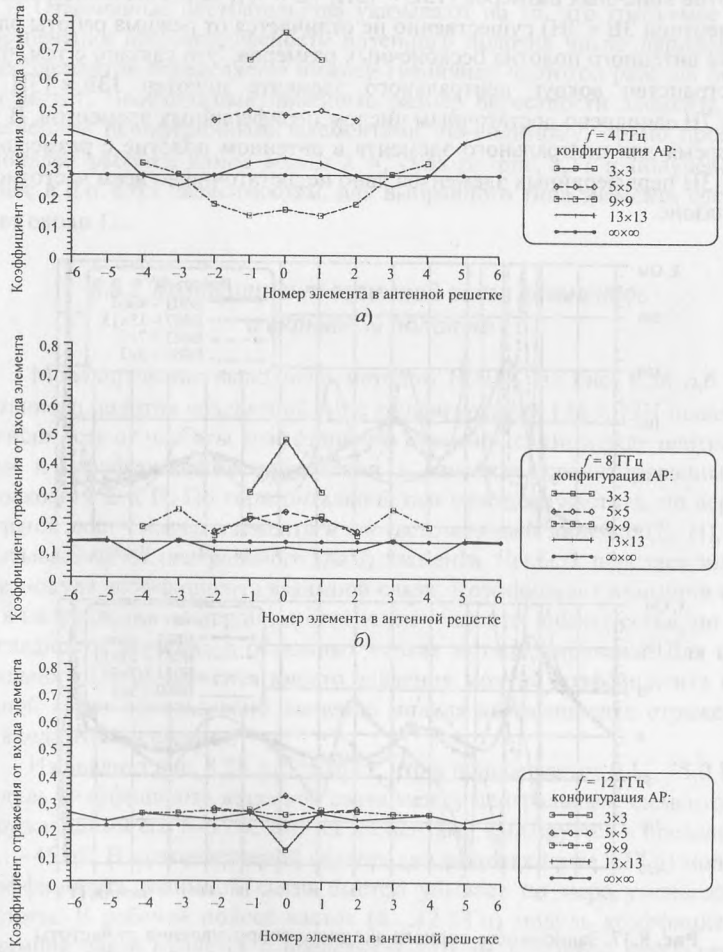


Рис. 8.36. Качество согласования элементов антенного полотна квадратной АР в главной линейке в плоскости H:
а – 4,0 ГГц; *б* – 8,0 ГГц; *в* – 12 ГГц

Оценка влияния периферийных элементов на качество согласования центрального элемента в антенном полотне двумерной АР. На рис. 8.37 представлены зависимости полного входного сопротивления от частоты для центрального элемента антенного полотна двумерной плоской АР бесконечного и конечных размеров. Видно, что на частотах выше 9,0 ГГц режим работы центрального элемента в антенном полотне конечных размеров (13E × 13H, 7E × 7H, за исключением малоэлементной 3E × 3H) существенно не отличается от режима работы элемента антенного полотна бесконечных размеров. Это связано с тем, что пространство вокруг центрального элемента полотен 13E × 13H и 7E × 7H заполнено достаточным числом периферийных элементов. В то же время для центрального элемента в антенном полотне с размерами 3E × 3H периферийных элементов явно недостаточно во всем частотном диапазоне.

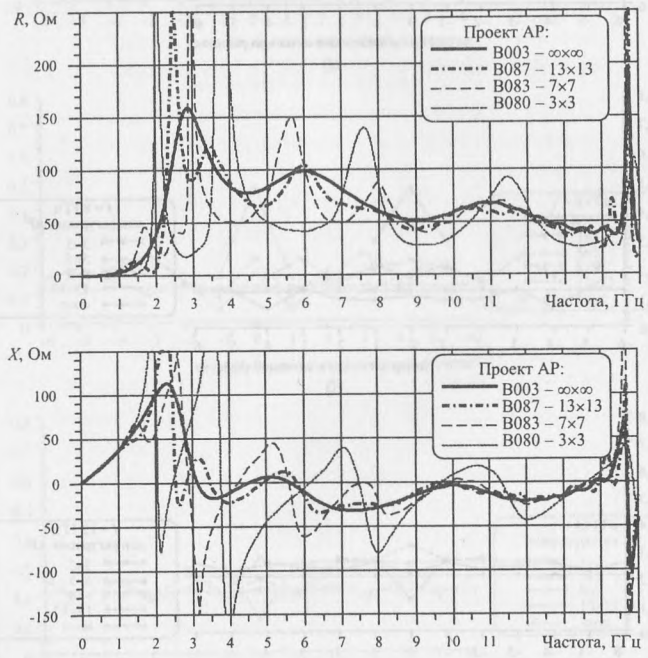


Рис. 8.37. Зависимость полного входного сопротивления от частоты для центрального элемента антенного полотна конечных размеров

С понижением частоты (от 9 ГГц и ниже) центральному элементу антенного полотна «средних» размеров (7E × 7H) начинает не хватать

периферийных элементов, и входное сопротивление центрального элемента указанного антенного полотна уже отличается от входного сопротивления элемента антенного полотна бесконечных размеров. Для центрального элемента «наиболее крупного» антенного полотна (13E × 13H) из числа показанных отличие во входном сопротивлении начинается с частоты около 7 ГГц.

Отмеченные обстоятельства указывают на то, что требуемое для обеспечения широкополосности антенного полотна число периферийных элементов определяется нижней граничной частотой рабочей полосы частот. Необходимый линейный размер окрестности элемента, заполненной периферийными элементами, по-видимому, прямо пропорционален рабочей длине волны λ и, судя по рис. 8.37 и полученным ранее в п.п. 8.6.1 зависимостям, для выбранного типа элемента составляет около 1λ.

8.6.2. Коэффициент взаимной связи элементов в антенном полотне

Моделирование выполнено методом FDTD. На рис. 8.38 *а,б* для антенного полотна квадратной АР с конфигурацией 13E × 13H показана зависимость от частоты коэффициента взаимной связи между центральным и периферийными элементами в линейках, ориентированных в плоскостях E и H. По горизонтальной оси отложена частота, по вертикальной оси – номер элемента в соответствующей линейке (E, H), отсчитываемый от центрального (№ 0) элемента. Яркость передает значение модуля коэффициента взаимной связи. Коэффициент взаимной связи в направлении оси ординат определен только на линиях сетки, но для наглядности значения в остальных точках интерполированы. Для центрального (№ 0) элемента вместо значения модуля коэффициента взаимной связи использовано значение модуля коэффициента отражения от входа этого элемента.

Из анализа рис. 8.38,*а,б* следует, что в полосе частот 0,1…15,0 ГГц модуль коэффициента взаимной связи между центральным элементом и окружающими его 5–6 соседними элементами варьируется в пределах –10…–45 дБ. В низкочастотной области (на частотах ниже 2 ГГц) модуль коэффициента взаимной связи быстро убывает по мере уменьшения частоты. В рабочей полосе частот (4…12 ГГц) модуль коэффициента взаимной связи меняется в пределах 7…10 дБ. С учетом результатов, полученных в п. 8.6.1, влиянием периферийных элементов на режим работы антенного элемента можно пренебречь, если модуль коэффициента взаимной связи не превышает –40…–45 дБ.

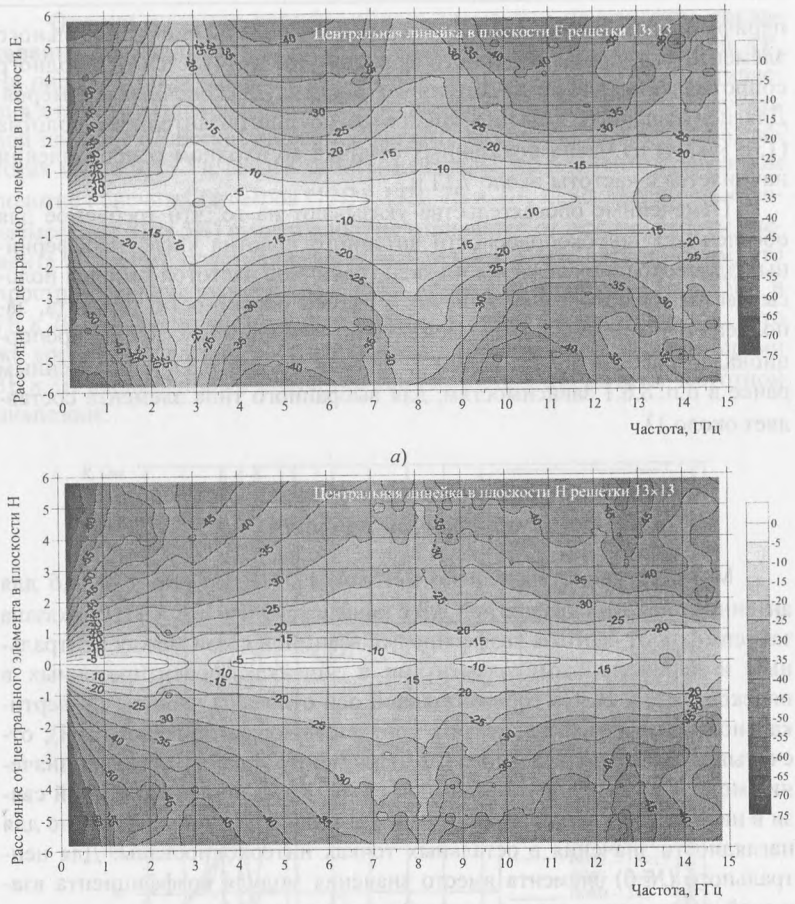


Рис. 8.38. Коэффициент взаимной связи, дБ, между центральным (№ 0) и периферийными (№ –6…–1 и 1…6) элементами в линейках антенного полотна плоской АР с размерами 13×13 элементов в зависимости от частоты и номера элемента:

а – для центральной линейки в направлении E;

б – для центральной линейки в направлении H

8.6.3. Диаграммы направленности антенных решеток

Моделирование выполнено методом FDTD (гл. 4). В соответствии с п. 6.8 поле регистрировалось в ближней зоне антенного полотна, после чего осуществлялся пересчет поля в дальнюю зону. Общие сведения о

параметрах моделей и ходе численного моделирования указаны в табл. 8.4 и комментариях к ней. Полученные результаты соответствуют режиму возбуждения излучателей антенного полотна падающей волной напряжения (тока) с одинаковым значением комплексной амплитуды, что не нарушает общности.

Линейная антенная решетка. На рис. 8.39, 8.40 представлены результаты численного моделирования для антенного полотна с конфигурациями 9E × 1H и 17E × 1H соответственно на граничных частотах рабочей полосы частот (4,0; 8,0 и 12 ГГц). Эскиз антенного полотна условно показан во врезке в нижней части каждого рисунка. На указанных рисунках представлены сечения нормированных диаграмм направленности плоскостью E; сечение диаграмы плоскостью H совпадает с диаграммой одиночного излучателя. Для наглядности во врезке в левом верхнем углу каждого рисунка показан вид трехмерной диаграммы направленности ан-

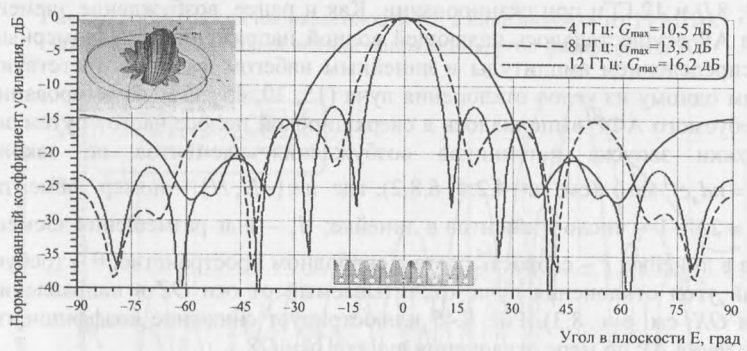


Рис. 8.39. Диаграмма направленности АР в виде линейки из девяти элементов

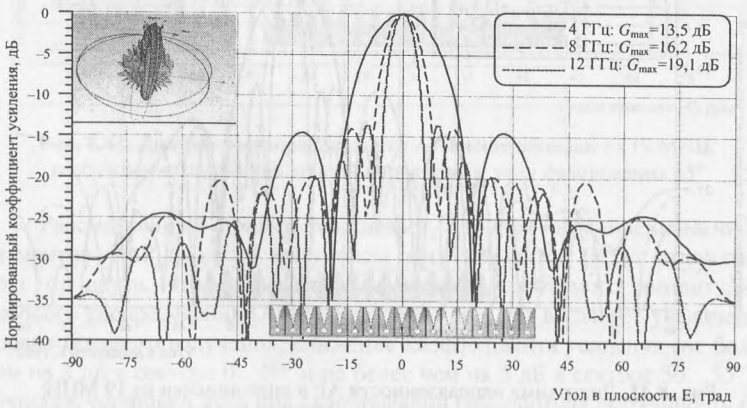


Рис. 8.40. Диаграмма направленности АР в виде линейки из 17 элементов

тенного полотна (для значения частоты 8,0 ГГц). Каждая диаграмма нормирована к своему максимальному значению; соответствующие максимальные значения КУ G_{max} с учетом потерь на отражение указаны во врезке в правой части каждого рисунка.

Видно, что с увеличением числа элементов в антенном полотне уровень боковых лепестков возрастает, поскольку с увеличением общего числа элементов в антенном полотне коэффициенты отражения от элементов центральной группы становятся практически одинаковыми, в связи с чем амплитудное распределение для центральной группы элементов приближается к равномерному. Последнее, как известно, характеризуется высоким уровнем боковых лепестков диаграммы направленности.

Сканирование лучом линейной антенной решетки. На рис. 8.41–8.44 представлены результаты расчета диаграммы (сечения в Е-плоскости) АР с конфигурацией 19Е × 1Н (см. табл. 8.4) на частотах 4,0; 8,0 и 12 ГГц при сканировании. Как и ранее, возбуждение элементов АР осуществлялось падающей волной напряжения с равномерным распределением амплитуды и линейным набегом фазы, соответствующим одному из углов отклонения луча (15, 30, 45, 55°). Формирование требуемого АФР выполнялось в сверхширокой полосе частот путем задержки запуска источников возбуждения элементов по закону $\tau_n = nd_x c^{-1} \sin\theta$ (см. пп. 4.2.4, 6.8.2), где $n \in [-N, N]$ – номер элемента; $M = 2N+1$ – число элементов в линейке; d_x – шаг размещения элементов в линейке; c – скорость света в свободном пространстве; θ – требуемый угол отклонения луча, отсчитываемый от оси OZ в направлении оси OX, см. рис. 8.3). Рис. 8.45 иллюстрирует снижение коэффициента усиления АР по мере отклонения луча от оси OZ.

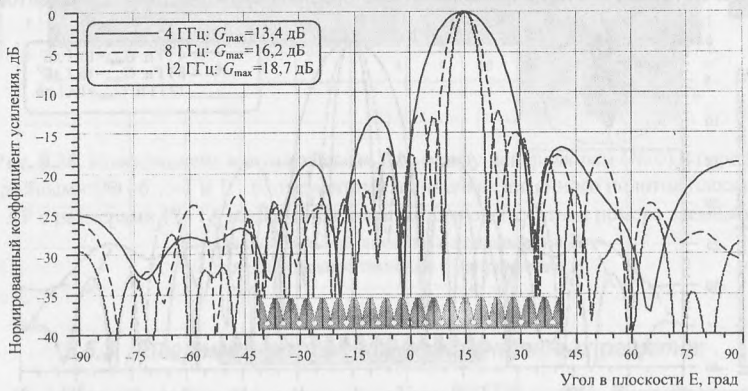


Рис. 8.41. Диаграмма направленности АР в виде линейки из 19 МНИ: возбуждение падающей волной напряжения, угол фазирования 15°

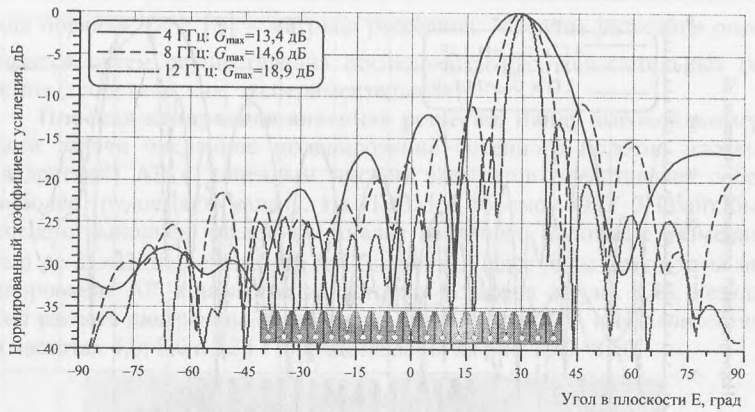


Рис. 8.42. Диаграмма направленности АР в виде линейки из 19 МНИ: возбуждение падающей волной напряжения, угол фазирования 30°

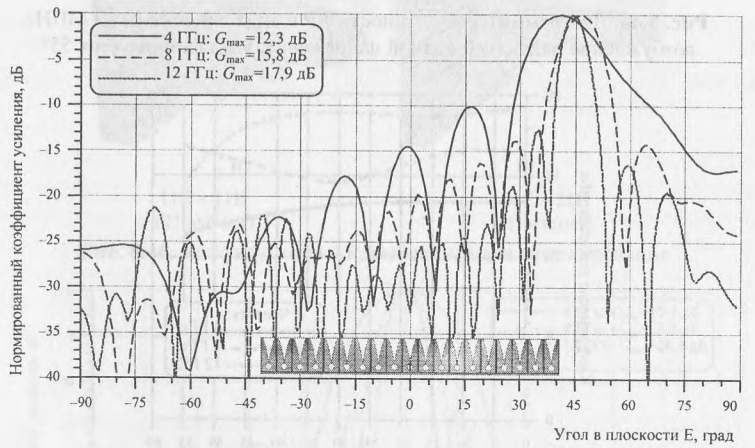


Рис. 8.43. Диаграмма направленности АР в виде линейки из 19 МНИ: возбуждение падающей волной напряжения, угол фазирования 45°

Рассмотренный пример показывает, что при ограниченном числе элементов ФАР входные импедансы этих элементов будут отличаться друг от друга, что приводит к искажению требуемого амплитудно-фазового распределения (АФР). Как следствие, это вызывает увеличение уровня бокового излучения, снижение коэффициента усиления (не более чем на 3 дБ в секторе 0…50° и не более чем на 5 дБ в секторе 50…55°) и точности установки луча при сканировании (абсолютная погрешность находится в пределах 3° на частотах 8,0 и 12 ГГц и 7° на частоте 4,0 ГГц).

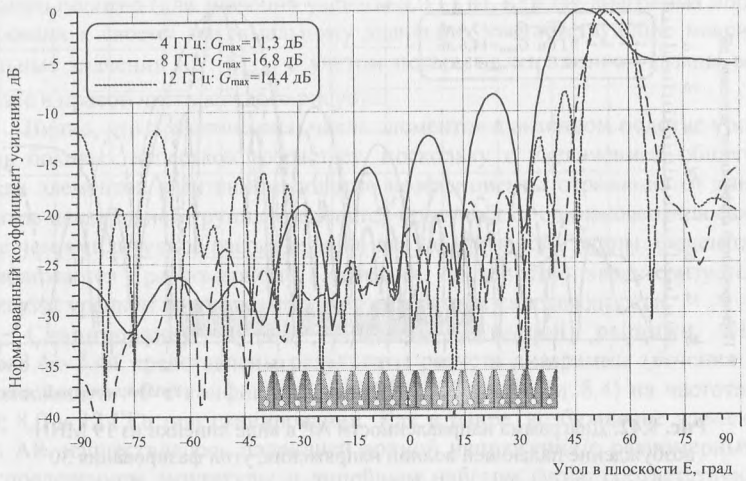


Рис. 8.44. Диаграмма направленности АР в виде линейки из 19 МНИ: возбуждение падающей волной напряжения, угол фазирования 55°

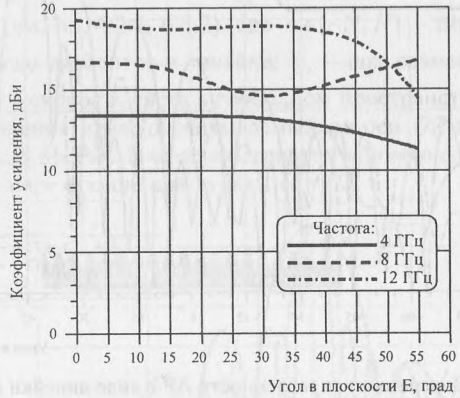
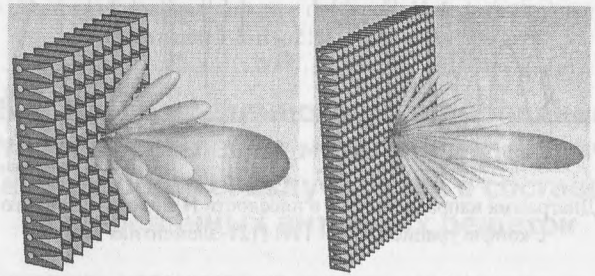


Рис. 8.45. Снижение коэффициента усиления АР в виде линейки из 19 элементов при сканировании

Для обеспечения в раскрыве антенны требуемого АФР (а не напряжения падающих волн) используют систему автоматического регулирования амплитуд и фаз в активном модуле каждого излучателя. Напряжения падающих волн $\mathbf{u}_{\text{пад}}>$, обеспечивающие требуемое АФР в раскрыве АР, связаны с напряжением на входах излучателей $\mathbf{u}>$ известным соотношением $\mathbf{u}_{\text{пад}}>=[\mathbf{E}+\mathbf{S}]^{-1}\mathbf{u}>$, где $[\mathbf{E}]$ – единичная матрица порядка $N\times N$; $[\mathbf{S}]$ – матрица рассеяния. Матрица рассеяния определяется путем осуществления последовательных испытательных режимов (теоретических, экспериментальных).

Плоская квадратная антенная решетка. Ввиду высокой размерности задачи численное моделирование антенного полотна плоской (квадратной) АР с конечным числом элементов представляет собой наиболее трудоемкую задачу. На ПЭВМ с объемом ОЗУ 3 Гбайт был успешно выполнен численный анализ антенного полотна с размерностью до 21×21 элемент (всего 441 элемент). Далее даны результаты моделирования АР, конфигурация которых показана на рис. 8.46. Результаты расчета диаграммы направленности (сечения в E- и H-плоскостях) на частотах 4,0; 8,0 и 12 ГГц представлены на рис. 8.47–8.50.



а) 11E × 11H, 121 элемент

б) 21E × 21H, 441 элемент

Рис. 8.46. Конфигурация АР, выбранная для моделирования

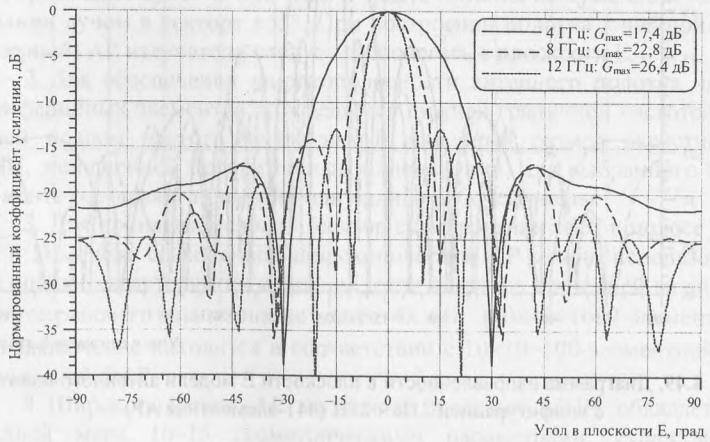


Рис. 8.47. Диаграмма направленности в плоскости E модели антенного полотна с конфигурацией 11E × 11H (121-элементная АР)

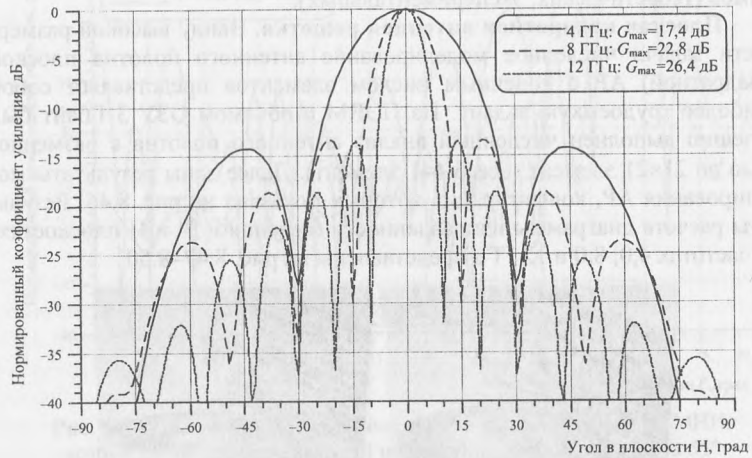


Рис. 8.48. Диаграмма направленности в плоскости H модели антенного полотна с конфигурацией 11E × 11H (121-элементная АР)

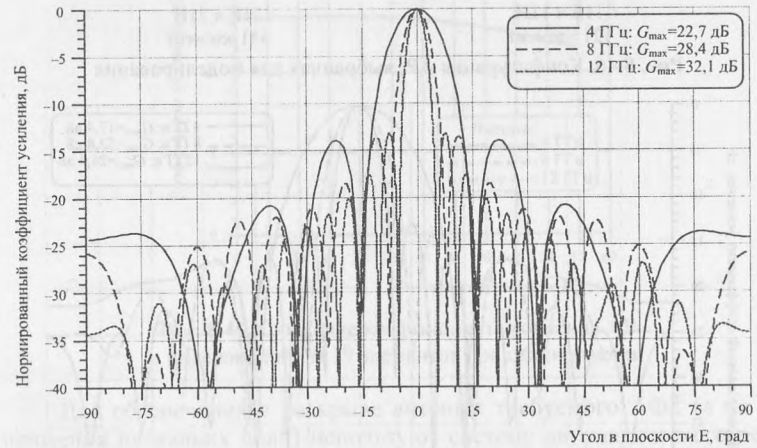


Рис. 8.49. Диаграмма направленности в плоскости E модели антенного полотна с конфигурацией 21E × 21H (441-элементная АР)

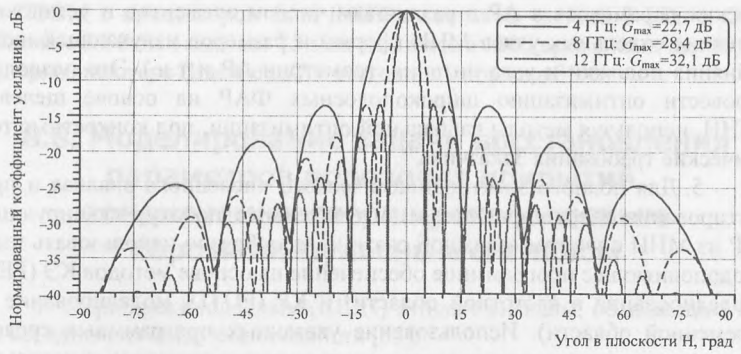


Рис. 8.50. Диаграмма направленности в плоскости H модели антенного полотна с конфигурацией 21E × 21H (441-элементная АР).

8.7. Итоги численного моделирование характеристик щелевых металлодиэлектрических неоднородных излучателей в составе фазированных антенных решеток

1. Численное моделирование подтвердило возможность построения полотна широкополосной сканирующей двумерной АР с использованием щелевых МНИ. Параметр широкополосности, определяемый как отношение верхней к нижней граничной частоты рабочей полосы частот, превышает 2,0…4,0 при КСВ в тракте питания не хуже 2,0 и сканировании лучом в секторе ±55°. При построении полотна линейной (одномерной) АР излучатели следует располагать в плоскости E.

2. Для обеспечения широкополосности антенного полотна число периферийных элементов определяется нижней граничной частотой рабочей полосы частот. Необходимый линейный размер окрестности МНИ, заполненной периферийными элементами, для выбранного типа элемента составляет примерно одну длину рабочей волны.

3. Для принятых условий (сектор сканирования ±55° в полосе частот 4:1) модель бесконечной широкополосной АР можно использовать для оценки характеристик конечной, если апертура последней на любой частоте рабочего диапазона не менее $4\lambda \times 4\lambda$ (40×40=1600 элементов). Это заключение находится в соответствии с 10×10=100-элементной узкополосной ФАР.

4. Широкополосная АР на основе щелевых МНИ обладает по крайней мере 10–15 геометрическими параметрами, существенно влияющими на ее характеристики. Проведенное моделирование позволило выработать рекомендации по выбору типа элемента, его геометри-

ческих параметров в АР с различным числом элементов и установить влияние отдельных узлов МНИ (формы и размеров излучающей щели, влияния подлжки и узла питания, геометрии АР и т.д.). Это позволяет провести оптимизацию широкополосных ФАР на основе щелевых МНИ, используя методы глобальной оптимизации, под конкретные технические требования Заказчика.

5. Для полного электродинамического численного анализа и проектирования сверхширокополосного антенного полотна сканирующих АР из МНИ с учетом взаимной связи целесообразно использовать взаимодополняющее программное обеспечение на основе методов КЭ (FEM, моделирование в частотной области) и КР (FDTD, моделирование во временной области). Использование указанных программных средств позволяет решать задачу анализа характеристик одиночных излучателей в составе полотна одномерных и двумерных ФАР различной размерности. Расхождение результатов расчета, полученных методами FEM и FDTD, находится в пределах 1…5 %.

6. Для полного численного моделирования конечных ФАР со сколь угодно большим числом МНИ, оптимизации их характеристик исходя из требований к уровню боковых лепестков, расчета параметров распределительной системы, синтеза АФР для формирования управляемых провалов в диаграмме направленности для борьбы с помехами и т.п. необходимо использовать параллельные вычислители. Например, суперкомпьютер IBM Blue Gene/P, представляющий собой массивно-параллельную вычислительную систему, которая состоит из двух стоек, включающих в себя 8192 процессорных ядра (2×1024 четырехъядерных вычислительных узла), и обладает пиковой производительностью 27,9 терафлоп ($27{,}8528\times10^{12}$ операций с плавающей точкой в секунду).

Использование подобных параллельных вычислительных комплексов целесообразно и оправдано в силу сложности структуры для моделирования (расчета и оптимизации) конечных АР из МНИ. В табл. 8.8 приведены оценки времени расчета на суперкомпьютере Blue Gene/P электродинамических задач различной размерности методом FDTD. Так, расчет задачи размерностью в 4 млн ячеек методом FDTD

Таблица 8.8

Размерность задачи (число ячеек сетки)	Время моделирования (на 1000 временных шагов)
100×100×100 (1 млн)	13 с
200×200×200 (8 млн)	59 с
300×300×300 (27 млн)	3 мин
400×400×400 (64 млн)	6 мин 25 с
500×500×500 (125 млн)	13 мин 10 с
900×900×900 (729 млн)	65 мин 30 с

на ПЭВМ с процессором Intel P4HT с тактовой частотй 3 ГГц и ОЗУ объемом 3 Гбайт занимает 25 мин на каждые 1000 временных шагов, на суперкомпьютере Blue Gene/P – всего лишь порядка 30 с.

8.8. Моделирование задачи восстановления параметров дорожных покрытий, зондируемых сверширокополосным короткоимпульсным сигналом

К сверширокополосным (СШП) относят сигналы, обладающие хотя бы одним из следующих свойств [51]:

– разность между верхней $f_в$ и нижней $f_н$ частотами спектра $f_в - f_н$ (ширина спектра по уровню – 10 дБ) не менее 500 МГц;

– отношение ширины спектра $f_в - f_н$ к его средней частоте $(f_в + f_н)/2$ (относительная полоса частот) не менее 0,2.

8.8.1. Введение

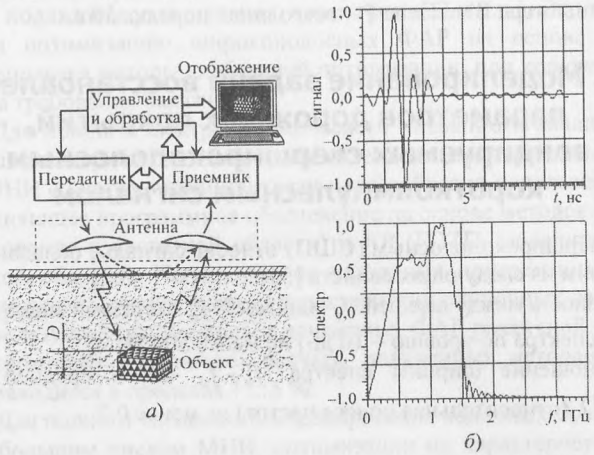
Контроль параметров дорожных покрытий, взлетно-посадочных полос, мостов и т.п., зондируемых СШП короткоимпульсным сигналом, позволяет повысить достоверность диагностики, увеличить в несколько раз оперативность мониторинга, исключить трудоемкие инвазивные процедуры контрольного бурения, сократить расходы на эксплуатацию, создать устойчивую ежегодно обновляемую базу данных эксплуатируемых объектов подповерхностной инфраструктуры [52].

Аппаратными технологиями, с помощью которых осуществляется этот контроль, являются радары подповерхностного зондирования (РПЗ). Принцип действия РПЗ (рис. 8.51,*а*) основан на зондировании исследуемого участка подповерхностной области СШП короткоимпульсным (например, длительностью $\Delta\tau \approx 1\,\text{нс} = 10^{-9}$ с) сигналом (рис. 8.51,*б*), регистрации отраженного сигнала, его обработке и отображении результатов зондирования на экране ПЭВМ. При движении несущего модуля РПЗ по поверхности грунта осуществляется непрерывное зондирование и запись регистрируемых сигналов в память ПЭВМ. Полезно сравнить рис. 8.51,*б* с рис. 4.7, где приведены форма и спектр сигналов источников возбуждения, используемых в МКРВО.

Привязка регистрируемого сигнала к местоположению РПЗ осуществляется с помощью датчика местоположения, формирующего импульсы-метки через определенные отсчеты пройденного пути.

Радар подповерхностного зондирования оснащен специализированным программным обеспечением (СПО). Структура СПО ComDia

(Computer Diagnostics) показана на рис. 8.52. Программы MultiScan и MultiImage организуют графический интерфейс с пользователем, управ-



а) *б)*

Рис. 8.51. К принципу действия радара подповерхностного зондирования

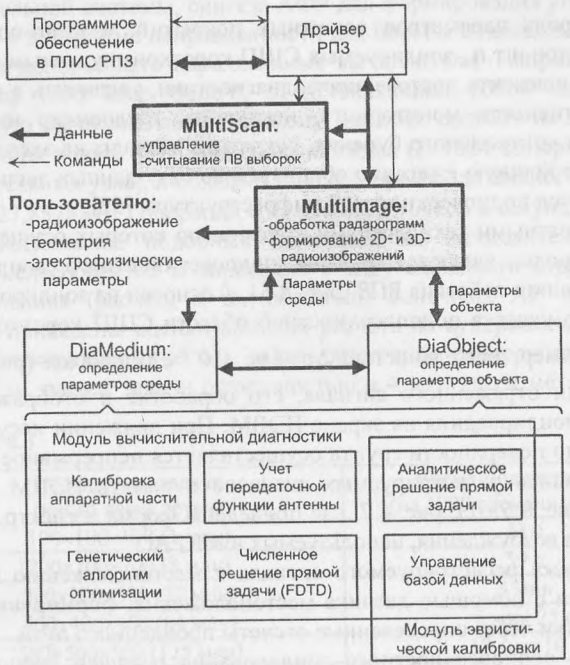


Рис. 8.52. Структура специализированного программного обеспечения

ляют режимами работы РПЗ, принимают данные от РПЗ, обеспечивают визуализацию на экране ПЭВМ сигналов, регистрируемых в отдельных каналах, а также формируют двумерные и трехмерные радиоизображения объектов. Помимо этого, из программы MultiImage запускаются программы DiaMedium и DiaObject, предназначенные для определения геометрических и электрофизических параметров подповерхностной области и объектов.

Повышение достоверности диагностики дорожных покрытий по результатам радиозондирования возможно на основе реконструкции их геометрических и электрофизических параметров ε_a, μ_a, σ_a, d с их последующей связью со структурой покрытий [52].

8.8.2. Электродинамические основы реконструкции электрофизических и геометрических параметров диэлектрических объектов. Выбор модели дорожных покрытий

Прежде всего отметим, что правильное формулирование задачи на языке математики – это научная проблема, не менее сложная, чем само решение задачи.

Дорожные покрытия и родственные объекты можно отнести к классу диэлектрических объектов с потерями. Чтобы восстановить электрофизические и геометрические параметры диэлектрических объектов с потерями по измеренным дискретным пространственно-частотным выборкам рассеянного поля, необходимо установить связь между ними. Такая связь установлена соотношением (6.70б). Подобные задачи рассматриваются как обратные: требуется по измеренным дискретным пространственно-частотным (временным) выборкам рассеянного электромагнитного поля $(\mathbf{E}(\mathbf{r})-\mathbf{E}^{\text{вн}}(\mathbf{r}))$, $\mathbf{r}\notin V_0$ сформировать радиоизображение $\mathbf{J}^{\text{пол}}$ или восстановить геометрические и электрофизические параметры $\tilde{\varepsilon}_a(r)$, $\mu_a=\mu_0$ диэлектрического объекта V_0 (см. рис. 6.4). При этом последняя процедура восстановления является нелинейной, поскольку в выражение $\mathbf{J}^{\text{пол}}=i\omega\varepsilon_0\left[\tilde{\varepsilon}_a(\mathbf{r})-1\right]\mathbf{E}$ входит полное поле $\mathbf{E}$, которое, в свою очередь, зависит от геометрических и электрофизических параметров диэлектрического объекта V_0.

Ответственным этапом решения таких задач является построение интерпретационной модели. Последняя должна быть достаточно содержательной, т.е. описывать основные особенности структуры. С другой стороны, она должна быть в определенной степени простой, т.е. характеризоваться небольшим числом свободных параметров для обеспечения практической устойчивости обратной задачи.

Для выбранного класса задач в качестве основных электродинамических моделей выбираются плоскослоистая $\varepsilon(z)=\varepsilon_i$, $\sigma(z)=\sigma_i$ и квазислоистая среда: $\varepsilon(x,y,z)=\varepsilon_i$, $\sigma(x,y,z)=\sigma_i$ при $z_{i-1}(x,y)<z<z_i(x,y)$, $i=1,...,n$, где $z=z_{i-1}(x,y)$ и $z=z_i(x,y)$ – поверхности, ограничивающие i-й слой переменной толщины $d_i(x,y)=z_i(x,y)-z_{i-1}(x,y)$, $z_0=0$ и $z_n=\infty$. Последняя модель используется в случае локально протяженных неоднородностей (пустот, водяных объектов и т.п.).

8.9. Алгоритм задачи восстановления параметров дорожных покрытий

Учитывая сложность решения обратной задачи, можно сказать, что выбор метода ее решения является определяющим.

8.9.1. Метод вычислительной диагностики

Для восстановления параметров таких сред далее используется метод вычислительной диагностики (МВД). При использовании МВД [53] постановка задачи сводится к определению электрофизических и геометрических параметров дискретной плоскослоистой среды $\mathbf{x}$ $\left(\varepsilon_i,\mu_i,\sigma_i,d_i;\ i\in[1,n]\right)$ по известным (измеренным) характеристикам рассеяния сверхширокополосного электромагнитного поля $\mathbf{u}$, которые связаны нелинейным операторным уравнением первого рода (6.70б):

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{u},\quad \mathbf{x}\in X,\quad \mathbf{u}\in U, \tag{8.19}$$

где X и U – метрические пространства; $\mathbf{A}$ – нелинейный материальный (п.п. 8.2.2) оператор. Значит, в соотношениях (6.70б) формула $\mathbf{J}^{\text{пол}}=i\omega\varepsilon_0\left[\tilde{\varepsilon}_a(\mathbf{r})-1\right]\mathbf{E}$ представляется в виде $\mathbf{J}^{\text{пол}}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{J}_i^{\text{пол}}\Pi_i$, где $\Pi_i=1$ при $z_{i-1}(x,y)<z<z_i(x,y)$ и $\Pi_i=0$ вне этого слоя.

В соответствии с МВД задача в общем случае сводится к безусловному экстремуму сглаживающего функционала

$$\Phi_\alpha\left(\mathbf{x},\mathbf{A},\mathbf{u}_\Delta\right)=\left\|\mathbf{Ax}-\mathbf{u}_\Delta\right\|_U^2+\alpha\left[\Omega(\mathbf{x})+\gamma\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right\|_X^2\right], \tag{8.20}$$

при этом решение находится из условия его минимизации

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\alpha\Delta}=\left\{\mathbf{x}_{\alpha\Delta}:\inf\left[\Phi_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{A},\mathbf{u}_\Delta)\right]\right\}. \tag{8.21}$$

Первое слагаемое в правой части (8.20) представляет функционал невязки между результатами измерений рассеянного поля $\mathbf{u}_\Delta$ и модель-

ной прямой задачей $\mathbf{Ax}=\mathbf{u}$, который, например, в случае многочастотного зондирования имеет вид

$$\left\|\mathbf{Ax}-\mathbf{u}_\Delta\right\|_U^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|\mathbf{Ax}-\mathbf{u}_\Delta\right\|^*\left\|\mathbf{Ax}-\mathbf{u}_\Delta\right\|\mathrm{d}\omega. \tag{8.22}$$

При этом между истинным значением рассеянного поля и измеренным существует погрешность $\left\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\Delta\right\|\le\Delta$, складывающаяся из погрешностей измерений и модельного приближения. Последняя является определяющей и вызвана тем, что реальные характеристики объекта $\mathbf{x}$ не соответствуют полностью тому классу моделей объекта, для которого определен оператор $\mathbf{A}$.

Положительно определенный функционал $\Omega(\mathbf{x})$ (α – параметр регуляризации) реализует отбор из множества решений X_Δ – $\left\|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}_{\alpha\Delta}-\mathbf{u}_\Delta\right\|_U^2\le\Delta^2$ наиболее простого решения $\tilde{\mathbf{x}}_{\alpha\Delta}$ в соответствии с априорными требованиями. Функционал $\Omega(\mathbf{x})$ должен задавать дополнительное условие, определяющее компактное множество моделей среды $\tilde{\mathbf{x}}_{\alpha\Delta}\in X_C$. Это условие обычно имеет вид $\Omega(\mathbf{x})\le C$, где C – некоторая константа (чем она меньше, тем уже множество X_C). Это может быть требование монотонности или гладкости решения, ограничения производной или вариации решения. Таким функционалом в случае плавного изменения параметров среды может быть

$$\Omega(\mathbf{x})=\int_0^Z\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial z}\right)^2\mathrm{d}z,\quad \mathbf{x}\in[0,Z], \tag{8.23}$$

а в случае n-плоскослоистой (квазислоистой) среды априорное задание числа слоев и диапазон изменения параметров в слоях.

Дополнительный стабилизатор $\gamma\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right\|_X^2$ (γ – вес, определяющий степень априорной информации о каждом из параметров) осуществляет при необходимости выбор из множества X_Δ решения, наиболее близкого к построенному на основе априорной информации гипотетическому решению $\mathbf{x}_0$:

$$\alpha\gamma\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right\|_X^2=\alpha\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\left\|(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_{i0})\right\|^2,\quad \mathbf{x}_0\in\left[\mathbf{x}_{i\min},\mathbf{x}_{i\max}\right] \tag{8.24}$$

при $z_{i-1}(x,y)<z<z_i(x,y)$, $i=[1,n]$,

γ_i – коэффициент, определяющий вес каждого из параметров $\mathbf{x}$ в i-слое.

Решение $\tilde{\mathbf{x}}_{\alpha\Delta}$ зависит от параметра регуляризации $\alpha(\gamma)$. При больших $\alpha(\gamma)$ основную роль играют критерии отбора решений, а при малых $\alpha(\gamma)$ большее значение имеет близость вычисленного $\mathbf{Ax}$ к измеренному $\mathbf{u}$. При выборе $\alpha(\gamma)$ обычно используют принцип невязки: выбирается максимальное $\alpha(\gamma)$, при котором выполняется условие $\left\|\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}_{\alpha\Delta} - \mathbf{u}_\Delta\right\|_U^2 \le \Delta^2$. Однако обычно точное значение Δ неизвестно, а имеется лишь оценка $\Delta_{\min} \le \Delta \le \Delta_{\max}$. В этом случае можно, например, решать задачу для нескольких значений Δ из указанного интервала, а затем производить усреднение полученных решений. В [53] можно найти иные рекомендации и подходы к выбору $\alpha(\gamma)$.

Обсуждение необходимых и достаточных условий единственности восстановления параметров является непростой математической задачей и частично приведено в [6]. Предполагается, что путем выбора сред с конечным числом слоев и ограниченным диапазоном возможных значений их параметров выделяют компактный класс решений при минимизации функционала (8.20).

8.9.2. Решение прямой задачи при использовании метода вычислительной диагностики

Поскольку процедура определения $\mathbf{x}(\varepsilon_i, \mu_i, \sigma_i, d_i;\ i \in [1, n])$ в соответствии с записью (8.20) существенно основана на решении прямой задачи, то для использования МВД необходимо иметь в наличии эффективные алгоритмы решения прямых задач для широкого диапазона частот. Очевидно, что тестирование метода можно проводить на наиболее простой модели – это зондирование плоскослоистой среды из n слоев плоской электромагнитной волной. Тогда решение находится в соответствии с формулой (8.20) из условия минимизации следующего функционала по результатам измерения на N_f частотах:

$$\Phi_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{A}, \mathbf{u}_\Delta) = \sum_{n=1}^{N_F} \left|(\dot{R}_{\text{и}}(\omega_i, \mathbf{x}) - \dot{R}_{\text{м}}(\omega_i, \mathbf{x})\right|^2 \Big/ N_F + $$

$$+\alpha \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \left\|(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i0})\right\|^2, \quad \mathbf{x}_{i0} \in \left[\mathbf{x}_{i\min}, \mathbf{x}_{i\max}\right] \qquad (8.25)$$

при $z_{i-1}(x, y) < z < z_i(x, y),\ i = [1, n]$,

где $\dot{R}_{\text{и}}(\omega, \mathbf{x})$, $\dot{R}_{\text{м}}(\omega, \mathbf{x})$ – измеренный (экспериментальный) и модельный комплексные коэффициенты отражения (нормированные передаточные

характеристики) среды соответственно при зондировании среды по нормали.

Очевидно, что $\dot{R}_{\text{м}}(\omega, \mathbf{x})$ должен соответствовать выбранной модели среды, а также условиям приема и зондирования среды реальным электромагнитным полем антенны. Выбранная модель не учитывает ряд существенных особенностей. При использовании функционала (8.20) необходимо проводить калибровку измерительной аппаратуры, а также исключить все артефакты, искажающие СШП зондирующий сигнал, из которых наиболее существенными для данной задачи являются искажения, вносимые импульсной характеристикой СШП передающей и приемной антеннами, а также их радиочастотными трактами. В случае зондирования среды реальным электромагнитным полем антенны для моделирования комплексной СШП электродинамической задачи передающая антенна – слоистая среда – приемная антенна целесообразно использовать МКР во временной области (гл. 4, Приложение 3) и МКЭ (гл. 5).

8.9.3. О методах глобальной оптимизации

При решении обратной задачи путем минимизации сглаживающего функционала (8.20), (8.25) помимо эффективных алгоритмов моделирования прямых задач для широкого диапазона частот необходимо использовать соответствующие алгоритмы минимизации (оптимизации) целевой функции (оптимизационного функционала), которая является невыпуклой и многопараметрической. На рис. 8.53 представлен пример минимизации толщины одного из слоев функционала (8.25) итерацион-

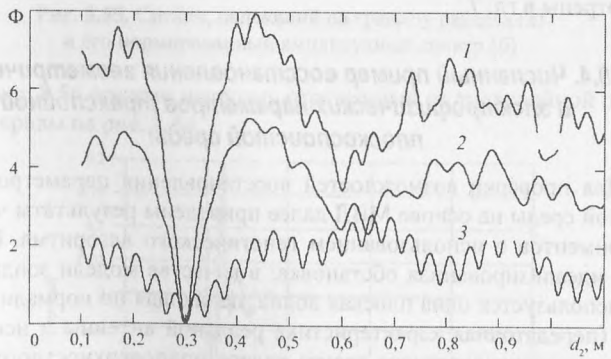


Рис. 8.53. Минимизируемый функционал для четырехслойной среды в зависимости от толщины второго слоя d_2:
1 – Δf=180…2000 МГц, N_f=20; 2 – Δf=500…1500 МГц, N_f=20;
3 – Δf=180…2000 МГц, N_f=5

ным градиентным методом для четырехслойной среды, параметры которой приведены далее, по результатам измерения на N_f частотах с равномерном шагом при различной полосе рабочих частот зондирующего сигнала. Слои имеют следующие электрофизические и геометрические параметры: верхний слой (бетон): $\varepsilon_2 = 7$, $\sigma_2 = 0$ См/м, $d_2 = 0{,}3$ м; средний (песок): $\varepsilon_3 = 2{,}5$, $\sigma_3 = 10^{-4}$ См/м, $d_3 = 0{,}7$ м; нижний (суглинок): $\varepsilon_4 = 2{,}6$, $\sigma_4 = 10^{-4}$ См/м. Существенная проблема, возникающая при решении обратной задачи градиентными методами, связана со сложностью поиска глобального минимума оптимизируемой целевой функции.

Из рис. 8.53 видно, что сходимость алгоритма к истинному значению зависит от начального приближения, иначе алгоритм дает одно из множества ложных решений. Чтобы расширить область уверенного поиска глобального минимума, целесообразно увеличить диапазон частот зондирующего сигнала. Следует отметить, что диапазон частот, используемый при обработке, существенно сказывается на времени счета.

У алгоритмов глобальной оптимизации одинаковые преимущества перед градиентными методами, так как с их помощью можно находить глобальные экстремумы функции, в то время как градиентные методы необходимо усложнять специальными приемами для выхода из локальных экстремумов. Генетический алгоритм и алгоритм пчел работает сразу со многими решениями, что позволяет искать глобальный экстремум сразу на всей области поиска. Подробно алгоритмы роя пчел и ГА рассмотрены в гл. 7.

8.9.4. Численный пример восстановления геометрических и электрофизических параметров трехслойной плоскослоистой среды

Для проверки возможностей восстановления параметров плоскослоистой среды на основе МВД далее приведены результаты численных экспериментов с использованием генетического алгоритма. Предполагается идеализированная обстановка: в качестве модели зондирующего поля используется одна плоская волна, падающая по нормали к поверхности (передаточная характеристика реальной антенны и искажающие свойства высокочастотного тракта радара подповерхностного зондирования не учитываются); среды взяты без потерь; число слоев среды и диапазон изменения параметров задаются; прямая задача рассчитывается аналитически с помощью коэффициентов отражения Френеля; для восстановления используется функционал (8.25) с $\alpha = 0$.

В качестве исходных данных взята трехслойная плоскослоистая среда со следующими параметрами (рис. 8.54):

– 1-й слой (воздух): $\varepsilon_1 = 1$; $\sigma_1 = 0$ См/м;

– 2-й слой: $\varepsilon_2 = 6$; толщина слоя $d_2 = 0{,}1$ м; $\sigma_2 = 0$ См/м;

– 3-й слой: $\varepsilon_3 = 4$; $\sigma_3 = 0$ См/м.

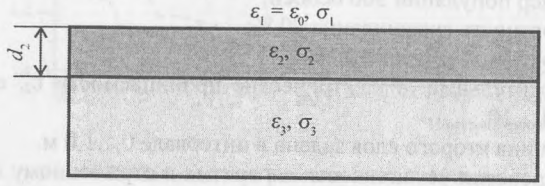


Рис. 8.54. Модель трехслойной плоскослоистой среды

Зондирующий СШП короткоимпульсный сигнал – видеоимпульс длительностью 1,5 нс – соответствует зондирующему сигналу экспериментального радара подповерхностного зондирования (рис. 8.55, $c\tau_и = 45$ см).

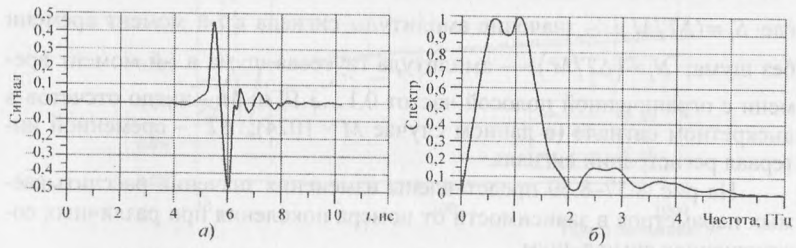


Рис. 8.55. Сигнал, падающий на границу раздела (*а*) и его нормированный амплитудный спектр (*б*)

На рис. 8.56 показан импульс, отраженный от трехслойной плоскослоистой среды на рис. 8.54.

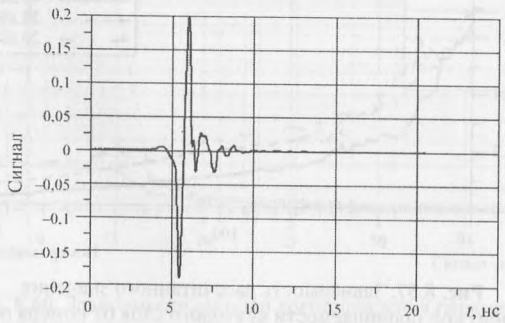


Рис. 8.56. Сигнал, отраженный от трехслойной плоскослоистой среды

Представленные сигналы позволяют определить диэлектрические проницаемости ε_2, ε_3 и толщину слоя d_2, используя целевую функцию (8.25), при этом расчет проводился на 12 частотах от 0,24 ГГц до 1,7 ГГц с шагом около 0,1 ГГц. В соответствии с генетическим алгоритмом (п. 7.1) используются следующие параметры:

– размер популяции 500 особей;

– вероятность скрещивания 90 %;

– вероятность мутации 20 %;

– относительные диэлектрические проницаемости ε_2, ε_3 заданы в интервале 1…10;

– толщина второго слоя задана в интервале 0…1,0 м.

Для проверки устойчивости алгоритма к отраженному сигналу добавлялся гауссов шум таким образом, что соотношение сигнал–шум задавалось заранее и рассчитывалось по следующей формуле:

$$SNR_{\partial B} = 10\lg\left(\sum_{i=1}^{M} S_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{M} N_i^2\right), \qquad (8.26)$$

где $S_i = (\Delta T/M)i$ – значение амплитуды сигнала в i-й момент времени без шума; $N_i = (\Delta T/M)i$ – амплитуда гауссова шума в i-й момент времени с ограниченной полосой частот 0,1…3 ГГц; M – число отсчетов в дискретном сигнале (в данном случае $M = 1024$); ΔT – временной интервал регистрации сигнала.

На рис. 8.57–8.59 представлены изменения значений рассчитываемых параметров в зависимости от номера поколения при различных соотношениях сигнал–шум.

Графики зависимости относительных погрешностей расчета параметров трехслойной плоскослоистой среды в зависимости от соотношения сигнал-шум показаны на рис. 8.60.

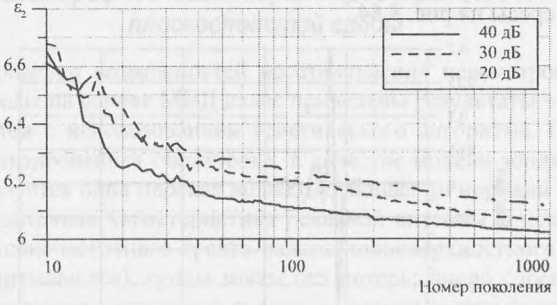


Рис. 8.57. Зависимость рассчитанного значения диэлектрической проницаемости ε_2 второго слоя от номера поколения при различных соотношениях сигнал–шум

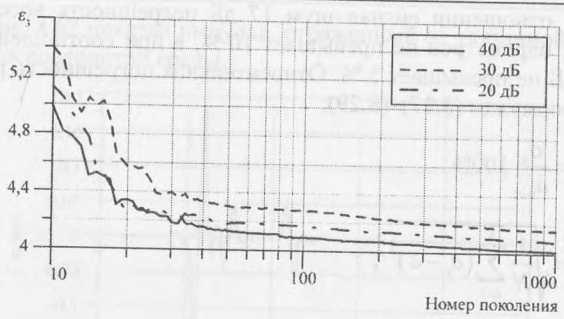


Рис. 8.58. Зависимость рассчитанного значения диэлектрической проницаемости ε_3 третьего слоя от номера поколения при различных соотношениях сигнал–шум

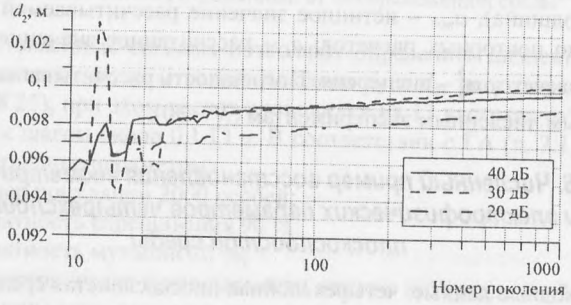


Рис. 8.59. Зависимость рассчитанного значения толщины второго слоя d_2 от номера поколения при различных соотношениях сигнал–шум

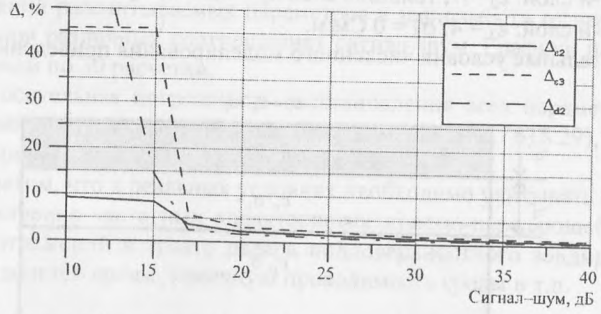


Рис. 8.60. Зависимости ошибки восстановления параметров трехслойной плоскослоистой среды от соотношения сигнал–шум

При отношении сигнал–шум 17 дБ погрешность восстановления всех трех параметров не превышает 10 %, а при соотношении сигнал–шум 20 дБ не превышает 5 %. Относительная погрешность рассчитывалась по формулам (8.27)–(8.29):

$$\Delta_a = \frac{\sigma_a}{a_{ист}} 100\%, \tag{8.27}$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(a_i - \overline{a})^2}, \tag{8.28}$$

$$\overline{a} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_i, \tag{8.29}$$

где a – геометрический или электрофизический параметр, для которого вычисляется погрешность (в данном случае диэлектрические проницаемости, толщина); $a_{ист}$ – истинное значение рассчитываемой величины; N – число повторных расчетов; a_i – рассчитанное значение параметра при i-м расчете; σ_a^2 – дисперсия. Погрешность рассчитывалась по 30 независимым численным экспериментам ($N = 30$).

8.9.5. Численный пример восстановления геометрических и электрофизических параметров четырехслойной плоскослоистой среды

Исходные данные: четырехслойная плоскослоистая среда (рис. 8.61) с параметрами:

– 1-й слой (воздух): $\varepsilon_1 = 1$; $\sigma_1 = 0$ См/м;
– 2-й слой: $\varepsilon_2 = 5$, толщина слоя $d_2 = 0{,}12$ м; $\sigma_2 = 0$ См/м;
– 3-й слой: $\varepsilon_2 = 7$; толщина слоя $d_2 = 0{,}20$ м; $\sigma_2 = 0$ См/м;
– 4-й слой: $\varepsilon_3 = 4$; $\sigma_3 = 0$ См/м.

Остальные условия численного моделирования приведены ранее.

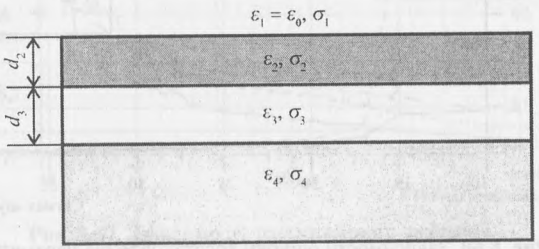


Рис. 8.61. Модель четырехслойной плоскослоистой среды

На рис. 8.62 показан импульс, отраженный от указанной четырехслойной плоскослоистой среды.

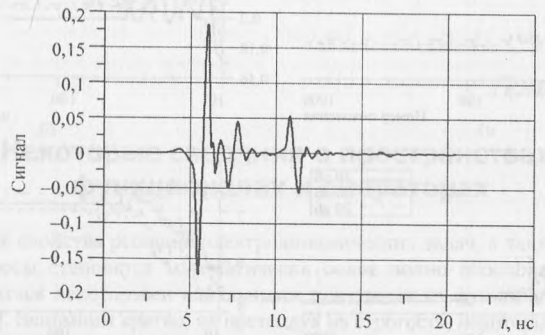


Рис. 8.62. Сигнал, отраженный от четырехслойной среды

Представленные сигналы позволяют определить диэлектрические проницаемости ε_2, ε_3, ε_4 и толщины слоев d_2 и d_3, используя целевую функцию (8.25), при этом расчет проводился на 12 частотах от 0,24 ГГц до 1,7 ГГц с шагом около 0,1 ГГц. В соответствии с ГА (п. 7.1) используются следующие параметры:

– размер популяции 2000 особей;
– вероятность скрещивания 90 %;
– вероятность мутации 20 %;
– диэлектрические проницаемости лежат в интервале 1…30;
– толщины второго и третьего слоев лежат в интервале 0…1,0 м.

Для проверки устойчивости алгоритма к отраженному сигналу добавлялся гауссов шум таким образом, что соотношение сигнал–шум рассчитывалось по формуле (8.26). На рис. 8.63 представлены изменения значений рассчитываемых параметров в зависимости от номера поколения при различных соотношениях сигнал–шум. Графики получены усреднением по 30 расчетам.

Относительная погрешность восстановления всех параметров четырехслойной среды, рассчитанная по формулам (8.27)–(8.29), при соотношении сигнал–шум 25 дБ не превышает 5 %.

Отметим, что в реальных условиях необходимо учитывать влияние пространственно-частотных характеристик приемо-передающей антенны, переотражений в тракте радара подповерхностного зондирования, неоднородностей среды, конечную проводимость среды и т.п.

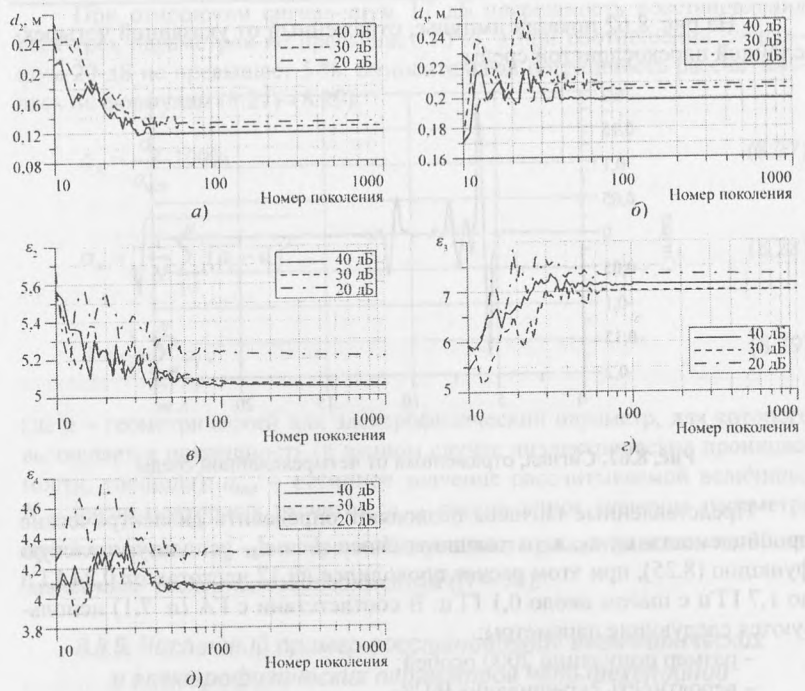


Рис. 8.63. Зависимости рассчитанных значений параметров четырехслойной плоскослоистой среды при разных соотношениях сигнал–шум

Некоторые сведения о пространствах, функционалах и операторах

Общие свойства решений электродинамических задач, а также многие частные вопросы становятся математически более полно обоснованными, если воспользоваться некоторыми начальными понятиями из функционального анализа [22, 23]. Вспомним кратко, не претендуя на строгость, некоторые положения. Стоит отметить, что понятие «пространство» означает наделение множества элементов произвольной природы некоторыми дополнительными свойствами.

П1.1. Определения 1. Метрические, линейные и нормированные пространства

Пусть X – множество элементов произвольной природы, объединенных по какому-либо признаку. Множество X называется *метрическим пространством*, если любой паре его элементов φ, ψ поставлено в соответствие вещественное число $\rho(\varphi,\psi)$ – расстояние между элементами (метрика) так, что выполняются аксиомы

$$\rho(\varphi,\psi)\ge 0 \text{ и } \rho(\varphi,\psi)=0$$

$$\text{при } \varphi=\psi;\ \rho(\varphi,\psi)=\rho(\psi,\varphi);\ \rho(\varphi,\psi)\le\rho(\varphi,\phi)+\rho(\phi,\psi). \qquad (П1.1)$$

Множество X, например, скалярных или векторных функций, заданных в ограниченной области V, называется *линейным*, если его элементы можно складывать и умножать на числа (в смысле обычной арифметики), при этом результатом этих действий является элемент того же множества. Говорят, что произвольные функции φ и ψ множества X, удовлетворяющие условию $(a\varphi+b\psi)\in X$, где a и b – произвольные числа, образуют *линейное функциональное пространство*. Различают линейные вещественные и комплексные пространства. Примером линейного функционального пространства является множество $C[a,b]$ всех непрерывных функций в области $D\in[a,b]$, или множество $[\mathbf{A}]_{mm}$ всех матриц порядка $m\times m$ со скалярными элементами a_{ij}:

$$[\mathbf{A}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}. \qquad (П1.2)$$

Линейное пространство X называется *нормированным,* если каждому элементу $\varphi \in X$ поставлено в соответствие вещественное неотрицательное число $\|\varphi\|$ (норма φ), так что выполняются аксиомы: $\|\varphi\| = 0$ только при $\varphi = 0$; $\|\lambda\varphi\| = \lambda\|\varphi\|$; $\|\varphi + \psi\| \le \|\varphi\| + \|\psi\|$. Заметим, что всякое линейное нормированное пространство X является *метрическим*, поскольку каждой паре его элементов φ, ψ может быть поставлено в соответствие вещественное число $\rho(\varphi, \psi) = \|\varphi - \psi\|$ – расстояние между элементами так, что выполняются аксиомы (П1.1).

Множество $C[a,b]$ всех непрерывных функций образуют нормированные пространства после введения норм с помощью любого из следующих равенств:

$$\|\varphi\| = \max|\varphi(x)|,\ x \in [a,b];\quad \|\varphi\| = \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)\,dx};\quad \|\varphi\| = \int_a^b |\varphi(x)|\,dx. \qquad (П1.3)$$

П1.2. Определения 2. Скалярное произведение, банахово и гильбертово пространства

Вещественное (комплексное) линейное пространство $E(U)$ называется *евклидовым* (*унитарным*), если каждой паре его элементов φ, ψ поставлено в соответствие вещественное (комплексное) число, обозначаемое (φ, ψ) и называемое скалярным произведением, и норма $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$, так, что выполняются следующие аксиомы:

$$(\varphi, \varphi) \ge 0 \text{ и } (\varphi, \varphi) = 0 \text{ только при } \varphi = 0;\ (\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)};$$

$$(\lambda\varphi, \psi) = \lambda(\varphi, \psi);\ (\varphi + \psi, \theta) = (\varphi, \theta) + (\psi, \theta), \qquad (П1.4)$$

где в случае евклидова пространства черта над $\overline{(\psi, \varphi)}$, означающая комплексное сопряжение, снимается.

Полное нормированное пространство называется *банаховым*. Пространство называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность элементов (функций) $\{\varphi_n\}_1^\infty$ в нормированном пространстве X имеет предел в рассматриваемом пространстве, т.е. предельная функция принадлежит к тому же пространству. Математически это записывается так

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_{n+p} - \varphi_n\| = 0, \qquad (П1.5)$$

где p – любое натуральное число. Выполнение условия (П1.5) гарантирует, что функция-решение задачи представляется сколь угодно точно с помощью сходящегося ряда по базисным функциям.

Линейное множество H называется *гильбертовым пространством,* если в нем определены понятия скалярного произведения (φ, ψ) и оно полно в норме $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$, порожденной скалярным произведением. Простейший пример

гильбертова пространства дает евклидово пространство E^m, в котором введено удовлетворяющее всем аксиомам (П1.4) скалярное произведение и норма. Например,

$$(\varphi, \psi) = \sum_{\kappa=1}^{m} \xi_\kappa \eta_\kappa,\quad \|\varphi\| = \sqrt{\sum_{\kappa=1}^{m} \xi_\kappa^2}, \qquad (П1.6)$$

где $\varphi = (\xi_\kappa)_{\kappa=1}^m$ и $\psi = (\eta_\kappa)_{\kappa=1}^m$ – числовые последовательности.

Другой пример – линейное пространство комплекснозначных, непрерывных на $[a,b]$ функций со следующими скалярным произведением и нормой:

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx,\quad \|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}. \qquad (П1.7)$$

Гильбертово пространство, элементами которого являются функции с интегрируемым квадратом, обозначается $L_2[a,b]$ и является естественным обобщением n-мерного евклидова пространства на бесконечномерный случай. Два элемента гильбертова пространства называются *ортогональными,* если $(\varphi, \psi) = 0$.

П1.3. Определения 3. Оператор, функционал

Соотношение $\mathbf{L}\varphi = f$, ставящее в соответствие каждому элементу (функции) $\varphi \in X$ определенный элемент $f \in Y$, задает *оператор*, действующий из X в Y. Множество X носит название области определения оператора, а область Y – область значений оператора. Если каждому элементу (функции) φ на множестве D_L поставлено в соответствии некоторое действительное или комплексное число $\Phi\{\varphi\}$, то говорят, что на множестве D_L определен *функционал* Φ.

Отметим некоторые свойства операторов. Оператор **L**, действующий из линейных нормированных пространств X в Y, называется *линейным,* если он аддитивен $\mathbf{L}(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbf{L}\varphi_1 + \mathbf{L}\varphi_2$, и *непрерывным*, если он сходится к $\mathbf{L}\varphi_0$, когда $\varphi \to \varphi_0$. Понятие линейного оператора обобщает понятие линейной функции.

Оператор **L** называется *ограниченным*, если он линеен и если для всех $\varphi \in D_L$ существует число $C > 0$ такое, что $\|\mathbf{L}\varphi\| \le C\|\varphi\|$, при этом наименьшая из постоянных C называется нормой ограниченного оператора **L** и обозначается $\|\mathbf{L}\|$.

Оператор **L** называется *положительно определенным*, если для всех функций $\varphi \in D_L$ справедливо неравенство $(\mathbf{L}\varphi, \varphi) \ge \gamma^2\|\varphi\|^2$, где γ – положительная константа.

В линейной алгебре изучаются сопряженные и самосопряженные матричные операторы. В бесконечномерном случае эти понятия обогащаются новым содержанием. Ориентируясь на гильбертово пространство L_2, введем соответ-

ствующие определения. Оператор $\mathbf{L}^*$ называется *сопряженным* к линейному оператор $\mathbf{L}$, если он удовлетворяет соотношению

$$(\mathbf{L}\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, \mathbf{L}^*\varphi_2), \qquad (П1.8)$$

где область определения операторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}^*$ в формуле (П1.8) – функции $\varphi_1, \varphi_2 \in D_{\mathbf{L}}$.

Пусть H – гильбертово пространство. Оператор $\mathbf{L}$ называется *самосопряженным,* если $\mathbf{L} = \mathbf{L}^*$, т.е. для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in H$ справедливо равенство $(\mathbf{L}\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, \mathbf{L}\varphi_2)$. Если скалярное произведение вещественно, то оператор $\mathbf{L}$ является симметричным.

П1.4. Определения 4. Собственные функции и собственные значения

Пусть X – линейное пространство и $\mathbf{L}$ – линейный оператор, действующий в X, с областью определения D_L. Число λ называется *собственным значением оператора* $\mathbf{L}$, если существует вектор $u \neq 0, u \in D_L$ такой, что

$$\mathbf{L}u = \lambda u, \qquad (П1.9)$$

при этом u называется *собственным вектором (функцией)* оператора $\mathbf{L}$, соответствующим собственному значению λ. Совокупность собственных значений носит название спектра оператора. Доказано, что собственные значения самосопряженного оператора действительны, а собственные функции образуют ортогональную полную систему функций. В частности, ортогональная система функций $\{u_n\}$ из гильбертова пространства H называется *полной*, если для любой функции $\varphi \in H$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n = \varphi, \qquad (П1.10)$$

т.е. ряд Фурье, составленный для φ сходится к φ. В Приложении 2 приведено описание некоторых матриц (операторов), что позволяет установить связь между типом оператора и свойствами его собственных значений, что отражено в табл. П1.1.

Таблица П1.1

Тип оператора	Свойства собственного значения
Эрмитов	Реальные собственные значения $\lambda_i > 0$
Положительно определенный	Собственные значения $\lambda_i > 0$
Положительно полуопределенный	Собственные значения $\lambda_i \geq 0$

К классификации матриц

Независимо от метода решения (моментов, Ритца, КЭ) операторного уравнения $\mathbf{L}\varphi = f$ последнее сводится к линейному ограниченному оператору, действующему из одного конечномерного нормированного пространства в другое, записанному в виде матричного соотношения

$$[\mathbf{A}]\,\mathbf{x} >= \mathbf{y} >, \qquad (П2.1)$$

где $[\mathbf{A}]$ – квадратная матрица (П1.2) порядка m, элементы которой $a_{ij}(i, j = 1, 2, ..., m)$; $\mathbf{x}> = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец неизвестных коэффициентов, T – знак транспонирования; $\mathbf{y} >= (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m)^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец заданной функции. В развернутом виде равенство (П2.1) записывается так:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\xi_j = \eta_i, \quad j = 1, 2, ..., m. \qquad (П2.2)$$

Ранее было продемонстрировано, как соответствующая матрица порождается оператором $\mathbf{L}$. Поэтому характеристика конечномерного матричного оператора (матрицы) определяет и тип оператора $\mathbf{L}$, что делает их формальное введение в Приложении 1 более наглядным (табл. П2.1).

Таблица П2.1.

Математическая формулировка	Описание матрицы
$[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}]^{\mathrm{T}} \quad (a_{ij} = a_{ji})$	Симметрическая
$[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}^*]^{\mathrm{T}} \quad (a_{ij} = \overline{a_{ji}})$	Эрмитова (самосопряженная)
$[\mathbf{A}]^{-1} = [\mathbf{A}^*]^{\mathrm{T}}$	Унитарная
$[\mathbf{A}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{A}] = [\mathbf{I}]$, $[\mathbf{I}]$ – единичная матрица	Ортогональная
$a_{ij} > 0$	Положительно определенная
$a_{ij} \geq 0$	Положительно полуопределенная
$a_{ij} = 0, \quad i \neq j$	Диагональная
$a_{ij} = 0, \quad i > j (i < j)$	Верхняя (нижняя) треугольная

Из табл. П2.1следует, что для самосопряженной матрицы $[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}]^*$ элементы являются транспонированными и комплексно самосопряженными ($a_{ij} = \overline{a_{ji}}$), а диагональные элементы вещественны. Если эрмитова матрица вещественна, то $a_{ij} = a_{ji}$, и она называется симметрической.

Приложение 3

Описание и функции программы «Максвелл +»

«Максвелл +» – это программа двумерного электродинамического моделирования, позволяющая рассчитывать процессы распространения электромагнитных волн в различных средах, дифракцию и рассеяние на двумерных объектах с различной геометрией и электрофизическими параметрами. Счетное ядро программы основано на методе КРВО (FDTD). Достоинством программы является то, что процессы распространения, дифракции и рассеяния электромагнитных волн можно наблюдать на экране в реальном масштабе времени.

Численное моделирование позволяет провести виртуальный эксперимент (особенно для сложных электродинамических объектов) с полнотой и наглядностью, недостижимой при реализации натурного эксперимента.

П3.1. Знакомство с программой. Интерфейс программы

Пользователь может запустить программу двойным нажатием на ее иконку на рабочем столе или через меню «Пуск». На рис. П3.1 приведен вид главного окна программы «Максвелл +». В верхней части окна под строкой главного меню программы расположены кнопки панели управления, которые объединены в четыре группы: «Работа с файлами», «Редактирование», «Рисование» и «Моделирование».

Ниже расположено окно рисования, в котором пользователь располагает объекты моделирования, источники возбуждения и зонды, регистрирующие электромагнитное поле. Окно рисования представляет собой плоскость XOY с началом координат в нижнем левом углу. Горизонтальная ось – OX, вертикальная – OY. Рабочая область окружена полностью согласованным слоем (ПСС), в англоязычном варианте Perfectly Matched Layer (PML), ограничивающим область моделирования. Слой поглощает падающие электромагнитные волны, предотвращая отражения от границ области моделирования, таким образом, в программе можно смоделировать распространение волн в свободном пространстве.

Внизу окна расположена строка состояния программы, в которой видна следующая информация:

– номер рассчитанного временного шага;

– тип возбуждения (синусоидальный или гауссов);

– поляризация поля TM (Hx, Hy и Ez компоненты поля) или TE (Ex, Ey и Hz компоненты);

– компонента поля, которая выводится на экран в данный момент;

– тип представления поля (линейный или логарифмический);

– вид отображаемого поля (полное поле, только падающее или только рассеянное).

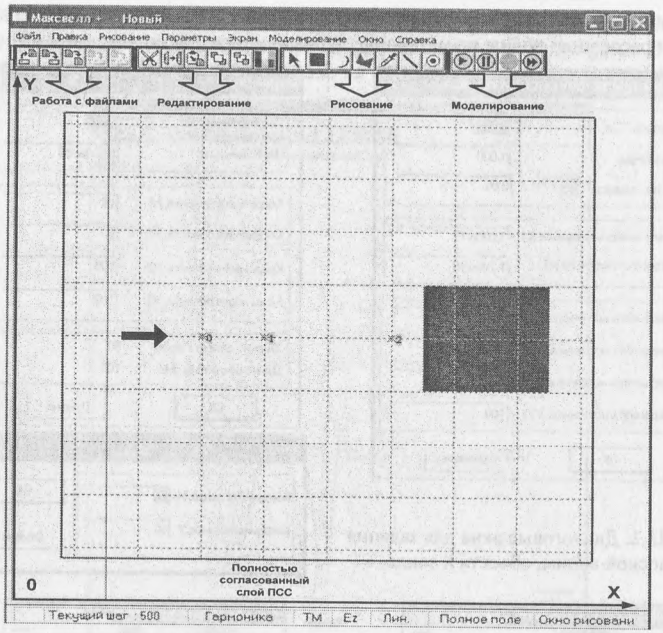


Рис. П3.1. Главное окно программы «Максвелл +»

Электродинамическое моделирование с помощью программы «Максвелл +» осуществляется в три основных этапа:

– задание пространственно-временной сетки;

– задание источников возбуждения, зондов и объектов моделирования;

– запуск вычисления, получение результатов моделирования и их анализ.

Для общего знакомства с программой можно загрузить ознакомительный проект, изображенный на рис. П3.1. Для этого в главном меню программы выберите *Файл – Открыть – Пример1.fig*. В окне рисования появится полупространство с заданным значением диэлектрической проницаемости (протяженный прямоугольник), в котором расположен металлический цилиндр квадратного сечения. Плоская волна, облучающая объект, падает слева направо; регистрация электромагнитного поля осуществляется тремя зондами, показанными на рисунке. На рис. П3.2 приведены диалоговые окна, которые вызываются двойным нажатием на объект, с помощью которых можно задать или отредактировать параметры плоской волны, прямоугольной диэлектрической области и зондов.

Выбрав в главном меню программы *Моделирование – Запуск* или нажимая соответствующую кнопку на панели управления, начинаем моделирование распространения и рассеяния электромагнитной волны. Программа автоматически переходит из окна рисования в окно распределения поля, в котором анимационно в реальном масштабе времени показывается распределение выбранной компоненты в исследуемой области. На рис. П3.3,*а–в* изображено окно распределения поля в различные моменты времени, соответствующие падению плоской волны с гаус-

совским импульсом на границу сред, отражению и прохождению в среду плоской волны и рассеянию волны на металлическом цилиндре, расположенном в среде.

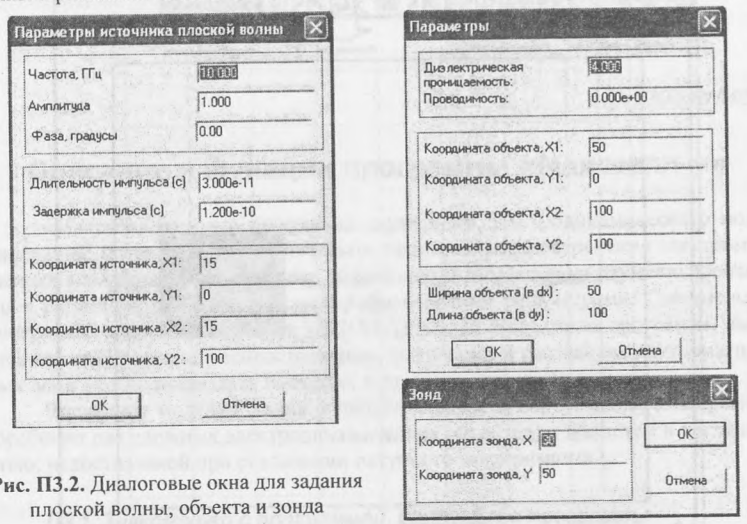
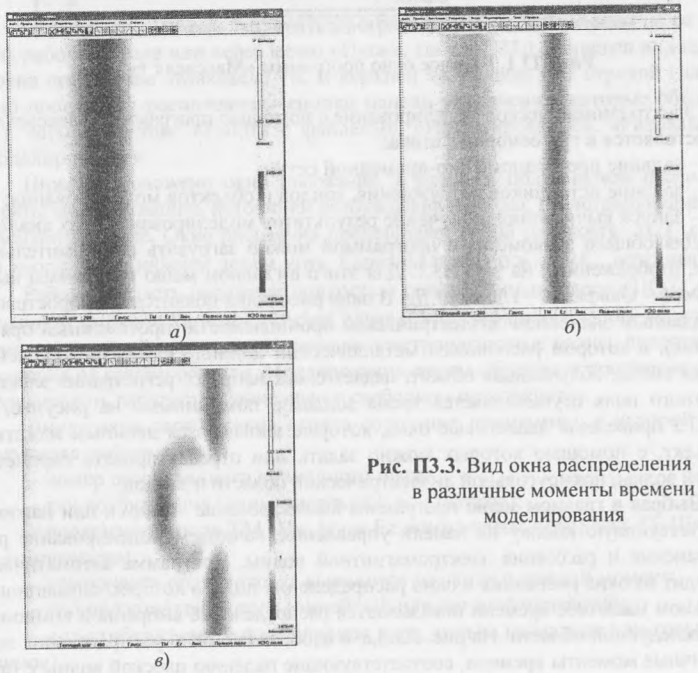


Рис. П3.2. Диалоговые окна для задания плоской волны, объекта и зонда



а) *б)* *в)*

Рис. П3.3. Вид окна распределения поля в различные моменты времени моделирования

Перейдя в окно сигналов во временной области, можно посмотреть и проанализировать сигналы, зарегистрированные выставленными зондами. Вид окна сигналов во временной области показан на рис. П3.4.

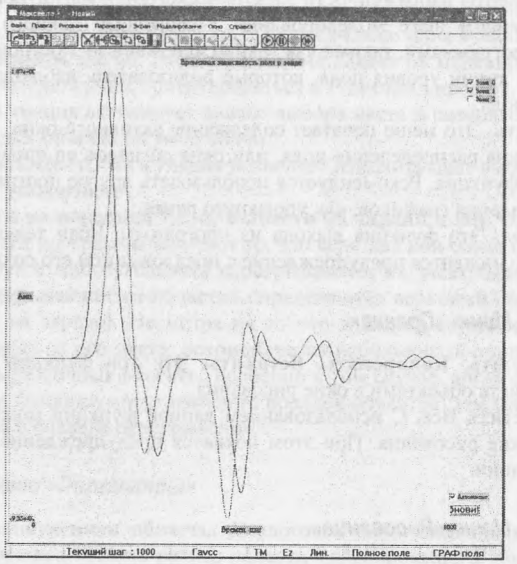


Рис. П3.4. Вид окна сигналов во временной области

П3.2. Функции главного меню

Далее описано главное меню программы «Максвелл +» с подробными пояснениями и комментариями к каждой функции.

П3.2.1. Меню «Файл»

– **Создать, Открыть, Сохранить, Сохранить как.** Эти четыре набора функций предназначены для создания файла и его сохранения. Расширение файла в программе .fig. В этих файлах в текстовом формате хранятся установочные параметры проекта, такие как, размер сетки, значения пространственных и временных шагов дискретизации, параметры источников возбуждения и объектов моделирования.

– **Сохранить Данные во временной области (Полное поле, Падающее поле, Рассеянное поле).** Эта строка меню будет активна, если в проекте установлены зонды и было начато моделирование. Расширение файла .td. В этот файл в текстовом виде записываются данные во временной области по выбранной компоненте электрического или магнитного поля, зарегистрированные зондами в указанных точках пространства. Пользователь может использовать внешние программы анализа данных, такие как Excel или Mathcad, для считывания этих данных, их дальнейшей обработки и создания графиков.

– **Сохранить распределения поля (Полное поле, Падающее поле, Рассеянное поле).** Эта строка меню активна, если было начато моделирование. Расширение файла .fld. В этом файле в текстовом виде записывается распределение компоненты напряженности электрического или магнитного поля при текущем временном шаге моделирования. С помощью данного файла можно внешними программами, такими как Matlab или Mathcad, построить трехмерные графики или линии уровня поля, которые пользователь наблюдает в окне распределения поля.

– **Печать.** Это меню печатает содержание активного окна, или окна рисования, или окна распределения поля, или окна сигналов во временной области. Это базовая функция. Рекомендуется использовать другое программное обеспечение для создания графиков, как упомянуто ранее.

– **Выход.** Это функция выхода из программы. Если текущий проект не был сохранен, появится предупреждение с предложением его сохранить.

П3.2.2. Меню «Правка»

– **Вырезать, Копировать, Вставить.** Эти три функции используются, чтобы управлять объектами в окне рисования.

– **Очистить Все.** С использованием данной функции можно удалить все объекты в окне рисования. При этом появится предупреждение о выполнении данной операции.

П3.2.3. Меню «Рисование»

– **Опции.** С помощью этой функции пользователь может задать в окне рисования объекты моделирования (прямоугольник, окружность, полигон), зонды и источники возбуждения (линейный источник, плоская волна). Для этого требуется задать одну или две базовые точки. Нажатием левой кнопки мыши задается первая точка, не отпуская кнопку, сместите курсор в нужном направлении и отпустите ее, задав вторую точку объекта. Двойным нажатием левой кнопки мыши на созданный объект активируется диалоговое окно, в котором можно отредактировать и изменить параметры созданного объекта.

Максимальное число зондов в программе ограничено – 11, номера зондов соответственно от № 0 до № 10.

– **Периодические Объекты.** Диалог для этого меню показан на рис. П3.5. Данная функция поможет сократить время создания проекта, если имеются периодически повторяющиеся объекты с одинаковой геометрией.

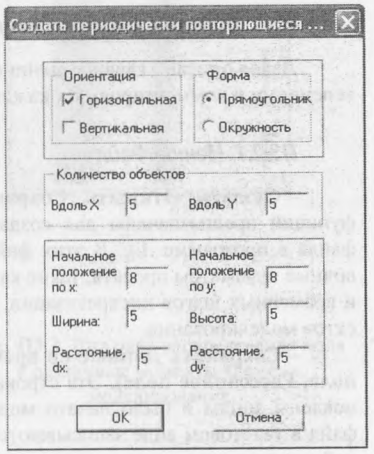


Рис. П3.5. Диалоговое окно для создания периодически повторяющихся объектов

По умолчанию создаются пять прямоугольных объектов в горизонтальном направлении с заданным размером и периодичностью. Можно изменить эти параметры, чтобы получить желаемые структуры.

– **Размер Сетки.** Эта функция настраивает период координатной сетки, которая отображается в окне рисования. По умолчанию одна ячейка сетки равна 10 пространственным шагам. Этот параметр не влияет на моделирование и позволяет пользователю лучше ориентироваться в геометрии проекта.

– **Цвет.** Функция активирует диалог выбора цвета и позволяет установить пользователю цвет объекта по умолчанию.

– **Изменить Цвет.** Эта функция позволяет изменить цвет выбранного объекта на цвет по умолчанию.

– **Вынести на передний план, Вынести на задний план.** Одной из важных особенностей программы является то, что если два или более объекта (прямоугольник, круг и многоугольник) перекрываются, их электрофизические параметры в перекрывающихся областях определяются верхними объектами (теми, что видны на экране). Несмотря на то что электрофизические параметры объекта не зависят от его цвета, рекомендуется использовать различные цвета, чтобы отличать различные объекты, особенно в том случае, когда они накладываются. Эти две функции могут изменять порядок объектов, тем самым получая разные свойства в области перекрывания.

П3.2.4. Меню «Параметры»

– **Пространственная область.** Диалоговое окно показано на рис. П3.6. Пользователь может изменять размер области моделирования и пространственный шаг дискретизации Δx и Δy в направлениях осей X и Y. Размер области моделирования задается числом шагов дискретизации. Стоит обратить внимание на то, что размер пространственного шага дискретизации задается с учетом максимальной частоты или длительности возбуждающего сигнала.

– **Временная область.** С помощью этой строчки меню задается значение временного шага дискретизации Δt и общее число шагов моделирования. Данное диалоговое окно показано на рис. П3.7. В окне для удобства пользователя



Рис. П3.6. Диалоговое окно для задания размера области моделирования и пространственных шагов дискретизации

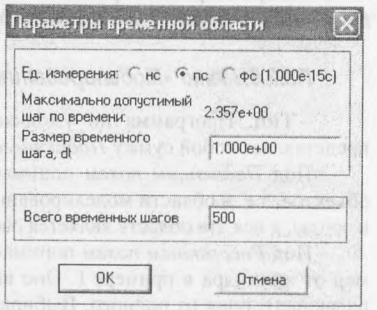


Рис. П3.7. Диалоговое окно для задания временного шага дискретизации и времени моделирования

также показывается максимально допустимое значение временного шага дискретизации Δt_{max}, которое рассчитывается согласно условию Куранта ($\sqrt{2}\upsilon_{max}\Delta t \le \Delta$). Если Δt превышает Δt_{max}, то временной шаг дискретизации будет установлен как $0{,}9\,\Delta t_{max}$ автоматически.

– **Область ПСС.** С помощью данной строчки меню задаются толщины слоев ПСС и их проводимости. Не рекомендуется изменять эти параметры, пока не появятся существенные отражения от границ области моделирования.

– **Возбуждение.** Выберите характер возбуждения – синусоидальный (гармонический) или гауссов сигнал. Синусоидальный сигнал можно использовать, чтобы определить распределение напряженности электрического и магнитного поля на некоторой частоте, а гауссов – чтобы получить частотную характеристику в широкой полосе частот, используя преобразование Фурье внешними программами, такими как Matlab или Mathcad.

– **Поляризация.** Установите тип поляризации: TE – поперечная электрическая поляризация, в этом случае электромагнитное поле будет иметь Ex, Ey и Hz компоненты; TM – поперечная магнитная поляризация с Hx, Hy и Ez компонентами поля.

– **Зарегистрированное Поле.** Данная строка в меню устанавливает выбранную составляющую электромагнитного поля для показа в окне распределения поля и окне сигналов во временной области, а также для записи этой информации в файл.

ПЗ.2.5. Меню «Экран»

– **Период обновления Экрана.** Этот параметр определяет, через сколько временных шагов дискретизации произойдет обновлением экрана окна распределения поля. По умолчанию период обновления экрана равен 10.

– **Отображаемое Поле.** Выберите, какое поле будет показано в окне распределения поля: *Полное поле*, *Падающее поле* или *Рассеянное поле*. Особенность вывода этих трех типов полей будет объяснена в разделе меню *Моделирование – Тип*.

– **Параметры отображения.** Позволяют установить линейный или логарифмический масштаб отображения поля.

ПЗ.2.6. Меню «Моделирование»

– **Тип.** Программа по умолчанию рассчитывает *Полное поле*, которое представляет собой сумму *Падающего поля* и *Рассеянного поля*.

Под *Падающим полем* понимается электромагнитное поле в отсутствие объектов, т.е. в области моделирования имеются только источники возбуждения и зонды, а вся эта область является свободным пространством.

Под *Рассеянным полем* понимается поле, отраженное от объектов, например от цилиндра в примере 1. Оно вычисляется в программе путем вычитания падающего поля из полного. Выбирая в программе строку *Полное и падающее поля*, можно разделить полное поле на падающее и рассеянное, чтобы наблюдать и регистрировать отдельно результаты рассеяния от объектов. Данная функция особенно полезна, когда падающее и рассеянное поля накладываются

во времени и интерферируют между собой. Для однородного пространства рассеянное от объектов поле отсутствует и может появиться при неудачном выборе параметров ПСС.

– **Текущие установки.** Эта команда показывает суммарную информацию о состоянии проекта моделирования: тип возбуждения и поляризации, значение и число временных и пространственных шагов моделирования, тип отображаемого поля и др.

– **Запуск.** Перед тем как начать моделирование, обязательно сохраните текущий проект! Данная строка меню *Моделирования* запускает текущий проект на счет, и программа автоматически из окна рисования переходит в окно распределения поля.

– **Пауза.** Позволяет приостановить моделирование в любой момент времени.

– **Продолжить.** Моделирование возобновляется после паузы.

– **Вперед.** Данная строка меню *Моделирование* позволяет продолжить моделирование на заданное дополнительное число временных шагов.

ПЗ.2.7. Меню «Окно»

– **Окно рисования.** Это окно по умолчанию появляется при запуске программы. В нем создаются и редактируются источники возбуждения, зонды и объекты моделирования.

– **Окно распределения поля.** В данном окне показывается распределение выбранной компоненты напряженности электрического или магнитного поля в зависимости от заданного типа (полное, падающее или рассеянное). В нем значение компоненты поля отображается в виде интенсивности цвета: красным цветом – положительные значения, синим – отрицательные. При включенном флажке *Автомасштаб* нормировка поля происходит по максимуму. При малых значения поля можно регулировать интенсивность ползунком, увеличивая масштаб.

– **Окно сигналов во временной области.** Это окно становится активным, если в области моделирования установлены зонды и процесс моделирования уже запущен. В окне выводятся данные о соответствующей компоненте электрического или магнитного поля, зарегистрированные зондами во временной области. Двойным нажатием на координатные оси можно устанавливать пределы построения графиков. Также предусмотрена функция автомасштаба и возможность выбора между зондами.

Список литературы

1. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы: Учеб. пособие для студентов физ-мат. специальн. вузов. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.
2. *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов: Учеб. для вузов. – М.: Высш. школа, 2009. – 840 с.
3. *Тыртышников Е.Е.* Методы численного анализа. – М.: Академия, 2007. – 328 с.
4. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1991. – 224 с.
5. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. – М.: МАКС Пресс, 2008. – 316 с.
6. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 311 с.
7. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 590 с.
8. *Никольский В.В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. – М.: Наука, 1967. – 460 с.
9. Вычислительные методы прикладной электродинамики / Под ред. *Г.П. Синявского.* – М.: Изд. Радиотехника, 2009. – 160 с.
10. *Кравченко В.Ф., Лабунько О.С., Лерер А.М.* и др. Вычислительные методы в современной радиофизике / Под ред. *В.Ф. Кравченко.* – М.: Физматлит, 2009.
11. *Баскаков С.И.* Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1992. – 416 с.
12. *Никольский В.В., Никольская Т.И.* Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 544 с.
13. *Петров Б.М.* Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. для вузов. – М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 558 с.
14. *Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцев А.Д.* Техническая электродинамика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 2000. – 536 с.
15. *Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П.* Электродинамические методы проектирования устройств СВЧ и антенн: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 2002. – 416 с.
16. *Неганов В.А., Осипов О.В., Раевский С.Б.* и др. Электродинамика и распространение радиоволн: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 2005. – 648 с.
17. *Russer P.* Electromagnetics, microwave circuits and antenna design for communicatios engineering. – Artech House, 2003, Boston, London. – p. 424.
18. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
19. *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. – М.: Радио и связь, 1983. – 295 с.
20. *Ваганов Р.Б., Каценеленбаум Б.З.* Основы теории дифракции. – М.: Наука, 1982. – 272 с.
21. *Garg R.* Analytical and computational methods in electromagnetics. – Artech House, 2008, Boston, London. – p. 528.
22. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 2004. – 496 с.
23. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.
24. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов. – М.: Наука, 1998. – 272 с.
25. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
26. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

27. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
28. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1982. – 380 с.
29. *Taflove A., Hagness S.C.* Computational electromagnetics: The finite-difference time-domain method, 3 rd. ed. – Artech House, Norwood, MA, 2005. – 853 p.
30. *Yu W., Mittra R.* CFDTD: Conformal -difference time-domain Maxwell`s equations solver. Software and User`S guide. – Artech House, London, 2004. – 316 p.
31. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов / Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
32. *Норрис Д., Фриз Ж. де.* Введение в метод конечных элементов / Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 300 с.
33. *Сильвестер П., Феррари Р.* Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров электриков / Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 229 с.
34. *Volakis J.L., Chatterjee A., Kempel L.C.* Finite element method for electromagnetic. – IEEE Press, 1998, New York. – p. 344.
35. *Jin J.* Finite element method in electromagnetic, 2 nd. ed. – John Willey, 2002, New York. – p. 354.
36. *Банков С.Е., Курушин А.А.* Расчет антенн и СВЧ-структур с помощью HFSS Ansoft. – М.: ОРКАДА, 2009. – 256 с.
37. *Гончаренко И.В.* Антенны КВ и УКВ: компьютерное моделирование. – М.: Радиософт, 2004. – 128 с.
38. *Банков С.Е., Курушин А.А.* Расчет излучающих структур с помощью FEKO. – М.: РОДНИК, 2008. – 248 с.
39. *Жиглавский А.А., Жилинскас В.Г.* Метода поиска глобального экстремума. – М.: Наука, 1991.
40. *Комарцова Л.Г., Максимов А.В.* Нейрокомпьютеры: Учеб. пособие для вузов. – М.: Изд-во МГТУ, 2004. – 400 с.
41. *Schwefel H.-P.* Numerical optimization of computer models. Chichester: Wiley & Sons, 1981.
42. *Джонс М.Т.* Программирование искусственного интеллекта в приложениях / Пер. с англ. Под. ред. *А.И. Осипова.* – М.: ДМК Пресс, 2006. – 312 с.
43. *Haupt Randy L., Werner Douglas H.* Genetic Algorithms in Electromagnetics, Wiley-IEEE Press, 2007. – p. 301.
44. *Сазонов Д.М.* Антенны и устройства СВЧ: Учеб. для радиотехн. спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1988. – 432 с.
45. *Воскресенский Д.И., Гостюхин В.Л., Максимов В.М., Пономарев Л.И.* Устройства СВЧ и антенны: Учебник для радиотехн. спец. вузов / Под ред. *Д.И. Воскресенского.* – М.: Радиотехника, 2006. – 231 с.
46. *Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч.* Теория и анализ фазированных антенных решеток / Пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 449 с.
47. Устройства СВЧ и антенны (проектирование ФАР): Учеб. пособие для вузов / Под ред. *Д.И. Воскресенского.* – М.: Изд. Радиотехника, 2003. – 632 с.
48. *Воскресенский Д.И., Кременецкий С.Д., Гринев А.Ю., Котов Ю.В.* Автоматизированное проектирование антенн и устройств СВЧ: Учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1988. – 240 с.
49. Активные фазированные антенные решетки / Под ред. *Д.И. Воскресенского, А.И. Канащенкова.* – М.: Радиотехника, 2004. – 488 с.
50. Modern antenna handbook. Edited by C.A. Balanis. – John Wiley & Sons, 2008. .
51. Широкополосные и сверхширокополосные сигналы и системы. Сб. статей / Под ред. *А.Ю. Гринева.* – М.: Радиотехника, 2009. – 168 с.
52. Вопросы подповерхностной радиолокации. Коллективная монография / Под ред. *А.Ю. Гринева.* – М.: Радиотехника, 2005. – 416 с.
53. Некорректные задачи естествознания / Под ред. *А.Н. Тихонова, А.В. Гончарского.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 299 с.

Предметный указатель

А

Алгоритм
  глобальной оптимизации
    генетический 213
    пчёл 220
Анимация 112
Антенна,
  коэффициент
    направленного действия 279
    бегущей волны 279
  решётка
    бесконечная 277
    конечная 284
    фазированная 233
Аппроксимация
  конечно-разностная 66
    вперёд 67
    граничных узлов 71
    назад 67
    со смещённой сеткой 84, 108
  центрально-разностная 67

Б

Базис
  ортогональный 42, 315
    полный 42,314

В

Возбуждение,
  гауссовский импульс 90
    амплитудно-модулированный 91
    дифференцированный 91
    дискретизированный 92
Волна
  E (TM)-типа 179
  H (TE)-типа 179
  плоская 35
Волновод
  Г-образный 31
  прямоугольный 31,137

Г

Граничные условия
  для открытой области 93
    абсолютно поглощающие 94, 101, 106, 161
    аналитические 94, 101, 110
    материальные 94, 101, 110
    идеально согласованные 102, 110
  Дирихле 26, 32
  излучения Зоммерфельда 22
  импедансные 22
  на идеально проводящей поверхности 22
  на рёбрах 25
  Неймана 26, 32, 147
  проекционные 40
  раздела сред 20

Д

Дисперсия
  численная 77, 110, 165
    Анизотропия 100

И

Импульс
  гауссовский 90
    дискретизированный 92
    дифференцированный 91
    модулированный 91
Излучатель
    металлодиэлектрический 234, 248, 297

К

Квазистационарное электромагнитное поле 28, 33
Координаты
  в единицах нормированной площади 156
  в единицах нормированного объёма 160
  сферические 201
  цилиндрические 179

Л

Линия передачи
  двухпроводная 31
  коаксиальная 31
  компланарная 31
  круглый металлический волновод 31
  прямоугольный металлический волновод 31
  П-образный металлический волновод 31
  симметричная полосковая 31, 77
  микрополосковая 31
  щелевая 31

М

Матрица
  диагональная 317
  обратная 317
  ортогональная 317
  положительно определённая 317
  симметрическая 317
  самосопряжённая 317
  треугольная 317
  унитарная 317
Метод
  взвешенных невязок 64, 125, 144, 152
  вычислительной диагностики 302
  гибридный 205
  конечных разностей 6, 66
  конечных разностей во временной области 6, 80
  конечных элементов 6,114
  моментов 6, 44
  Ритца 62, 122
  Трефтца 52
Модель
  среды 302

Н

Напряжённость
  магнитного поля 17
  электрического поля 17

О

Оператор
  Гамильтона 15
  Лапласа 16
  линейный 315
  нелинейный 315
  непрерывный 315
  ограниченный 315
  положительно определённый 315
  самосопряжённый 316
  симметрический 316
  сопряжённый 316
Оптимизация
  глобальная 227, 305

П

Параметры
  геометрические 306
  электрофизические 306
Принцип эквивалентности 23
Пространство
  банахово 314
  гильбертово 314
  евклидово 314
  линейное 313
  метрическое 313
  нормированное 314
  полное 314
Программа
  пакет 112, 166, 211

Р

Решётка
  антенная 232
  фазированная 233
Регуляризация 183

С

Сетка
  пространственно-временная 85
    размер ячейки 86, 99, 110
    временной шаг 89
    смещённая 84
Сигнал
  сверхширокополосный 299
  короткоимпульсный 299
Скорость
  групповая 34
  фазовая 34, 85
Собственные значения 316
Собственные функции 316
Среда
  анизотропная 100
  изотропная 18
  однородная 18, 151
  неоднородная 144, 150
  полностью согласованная 105

Т

Теорема
  Коши 176
  Остроградского–Гаусса для ротора 190
  эквивалентности
Тождество
  векторное 16, 145
Ток
  магнитный 19, 200
  электрический 17, 200
    поляризации 193, 301

У

Узел
  глобальный 121, 127
  локальный 121, 127
Уравнение
  волновое 29, 145, 150
  Гельмгольца 5, 136

Лапласа 26, 133
Максвелла
в дифференциальной форме 17
в интегральной форме 17
в комплексной форме 19
дисперсионное 87
интегральное
для диэлектрических объектов 188, 192
для металлических объектов 185, 190
сингулярное 184
Фредгольма второго и первого рода 182
дифференциальное 25
Пуассона 26, 69
слабая форма 65
теории длинных линий 33
Штурма–Лиувилля 43, 127
Эйлера 56
Условие
Гельдера 185
граничное 20
Дирихле 26
Зоммерфельда 22
Неймана 26

Ф

Формула
Грина 182
Стреттона–Чу 189
Функция
базисная 44, 46, 209
выпуклая 224
Грина
свободного пространства 173
спектральное представление 174, 175, 177
Дирака 172
Импульсная 47
Интерполяционная 128
Лежандра 48
невыпуклая 218
ортогональная 44
проекционная 46, 209
треугольная 48
формы 116, 119, 138
Чебышева 49
элемента 117, 119
Функционал
минимизируемый 59, 261, 302
многопараметрический 305
модифицированный 60
невыпуклый 305
оптимизационный 261
стационарный 55
Фурье-преобразование 203

Х

Характеристика
направленности 282
дисперсионная 34
численная 77, 110

Ц

Циркуляция 17

Ч

Частота
круговая 19
пространственная 100

Ш

Шлейф
круговой 241, 259
секториальный 241, 248

Э

Экстремум
глобальный 306
локальный 306
Электродинамический потенциал
электрических токов 30, 200
магнитных токов 30, 200
Электромагнитное поле
квазистационарное 28
распространение 77
пространственно-временное 85
Элемент
одномерный 116
двумерный 117
трёхмерный 119
матрица
объединение 121, 130
функция
векторная краевая 152, 156
скалярная узловая 150
форма 116

Я

Ячейка
смещённая 84, 108
для ТЕ-волны 97
для ТМ-волны 97
трёхмерная 108
Фарадея 98

Оглавление

Список сокращений 11
Список обозначений 12
Предисловие 3
Введение 5

ГЛАВА 1. Основные соотношения макроскопической электродинамики 15
1.1. Элементы векторного анализа 15
1.1.1 Операторы векторного анализа 15
1.1.2. Векторные тождества 16
1.2. Система уравнений электродинамики – уравнения Максвелла 17
1.2.1. Система уравнений электродинамики 17
1.2.2.Уравнения электродинамики в комплексной форме 19
1.3. Граничные условия. Принцип эквивалентности 20
1.3.1.Граница раздела сред 20
1.3.2. Поверхности, ограничивающие рассматриваемую область пространства 22
1.3.3.Принцип эквивалентности 23
1.3.4. Об особенностях поведения полей 24
1.4. Дифференциальные уравнения электродинамики 25
1.4.1. Уравнения электростатики 25
1.4.2. Стационарное поле 27
1.4.3. Квазистационарное электромагнитное поле 28
1.4.4. Волновые уравнения для векторов поля и электродинамических потенциалов 29
1.4.5. Волновые уравнения для векторов поля в линиях передачи 30
1.4.6. Уравнения теории длинных линий 33
1.5. Фазовая скорость, дисперсия, групповая скорость 34
1.6. Численные и аналитические методы решения задач электродинамики 36

ГЛАВА 2. Проекционные методы решения электродинамических задач 40
2.1. Ортогональные системы функций и ортогональные ряды 40
2.1.1. Основные свойства 40
2.1.2. Скалярное одномерное дифференциальное уравнение Штурма-Лиувилля 43
2.2. Метод моментов 44

2.2.1. Общая схема метода ... 44
2.2.2. Метод Бубнова-Галеркина для скалярного одномерного дифференциального уравнения ... 46
2.2.3. К выбору базисных и проекционных функций ... 46
2.3. Некоторые проекционные схемы для уравнений Максвелла ... 50
2.3.1. Основная проекционная схема ... 50
2.3.2. Проекционные наложения граничных условий ... 52
2.4. Вариационные формулировки краевых задач ... 55
2.4.1. Стационарный функционал ... 55
2.4.2. Энергетическая трактовка стационарного функционала ... 59
2.4.3. Стационарный функционал в терминах функционального анализа ... 59
2.4.4. Некоторые вариационные представления для уравнений Максвелла ... 62
2.5. Вариационный метод Ритца ... 62
2.6. Метод взвешенных невязок ... 64

ГЛАВА 3. Метод конечных разностей ... 66
3.1. Конечно-разностная аппроксимация ... 66
3.2. Конечно-разностная аппроксимация уравнений Лапласа и Пуассона ... 69
3.3. Конечно-разностная аппроксимация для граничных узлов ... 71
3.4. Анализ структур методом конечных разностей ... 75
3.4.1. Определение емкости линии из двух неоднородно заполненных пластин ... 75
3.4.2. Определение характеристического импеданса и фазовой скорости экранированной микрополосковой линии ... 76
3.5. Распространение электромагнитной волны и численная дисперсия ... 77

ГЛАВА 4. Метод конечных разностей во временной области ... 80
4.1. Распространение импульса в линии передачи ... 80
4.2. Одномерный метод конечных разностей во временной области ... 83
4.2.1. Алгоритм одномерного метода ... 83
4.2.2. Выбор пространственного шага и явление дисперсии ... 86
4.2.3. Временной шаг и стабильность решения ... 89
4.2.4. Источники возбуждения ... 90
4.2.5. Граничные условия для открытой области ... 92
4.3. Двумерный метод КРВО ... 96
4.3.1. Единичная ячейка в двумерном случае ... 96
4.3.2. Явление численной дисперсии, анизотропии и выбор пространственных шагов ... 99
4.3.3. Ограничение области моделирования ... 101

4.4. Трехмерный метод КРВО ... 107
4.4.1. Алгоритм трехмерного метода КРВО ... 108
4.4.2. Явление численной дисперсии и выбор шагов дискретизации ... 110
4.4.3. Ограничение области моделирования ... 110
4.4.4. К сравнению аналитических и материальных граничных условий ... 111
4.5. Пакет программ для численного анализа электромагнитных полей методом конечных разностей во временной области ... 112

ГЛАВА 5. Метод конечных элементов ... 114
5.1. Дискретизация пространства и линейные интерполяционные полиномы ... 115
5.1.1. Одномерный элемент ... 116
5.1.2. Двумерный элемент ... 117
5.1.3. Трехмерный элемент МКЭ. Интерполирование векторных величин. Функции элемента для всей дискретизируемой области ... 119
5.2. Реализация метода конечных элементов процедурами Ритца и Бубнова-Галеркина ... 122
5.2.1. Реализация МКЭ алгоритмом Ритца ... 122
5.2.2. Реализация МКЭ алгоритмом Бубнова-Галеркина ... 125
5.3. Решение одномерных задач методом конечных элементов ... 126
5.3.1. Алгоритм решения ... 127
5.3.2. Процедура объединения элементов ... 129
5.3.3. Процедура учета граничных условий ... 131
5.3.4. Численный пример ... 131
5.4. Решение двумерных задач в ограниченной области методом конечных элементов ... 133
5.4.1. Решение уравнения Лапласа ... 133
5.4.2. Решение скалярного уравнения Гельмгольца ... 136
5.5. Решение двухмерных задач рассеяния с алгоритмом взвешенной невязки ... 144
5.6. Решение трехмерных векторных задач методом конечных элементов ... 150
5.6.1. Волновые уравнения ... 150
5.6.2. Трехмерный векторный метод конечных элементов с алгоритмом взвешенной невязки ... 152
5.6.3. Векторные краевые функции элемента ... 153
5.6.4. Ограничение области решения для моделирования антенн и полей рассеяния ... 161
5.6.5. Решение слабой формы волнового уравнения ... 163
5.6.6. Трехмерная векторная вариационная формулировка метода конечных элементов ... 164
5.7. Точность и численная дисперсия ... 165

5.8. Пакет программ для численного анализа электромагнитных полей методом конечных элементов ... 166

ГЛАВА 6. Интегральные представления и интегральные уравнения ... 170

6.1. Функции Грина ... 171
6.1.1. Определение функции Грина волнового уравнения ... 171
6.1.2. Спектральное представление функции Грина (пример одномерного представления) ... 174
6.1.3. Спектральное представление трехмерной функции Грина свободного пространства ... 175
6.1.4. Спектральное представление функции Грина для ограниченной области решения ... 177
6.2. Представление для поля в пространстве через функцию Грина (скалярная задача) ... 178
6.2.1. Скаляризация трехмерных задач ... 179
6.2.2. Интегральные представления ... 179
6.3. Общие сведения об интегральных уравнениях ... 182
6.3.1. Интегральные уравнения Фредгольма второго и первого рода ... 182
6.3.2. Сингулярные интегральные уравнения ... 184
6.4. Интегральные уравнения для внешних задач дифракции, получаемые с помощью функций Грина (двумерный случай) ... 186
6.4.1. Металлический объект ... 186
6.4.2. Диэлектрический объект ... 188
6.5. Векторное представление поля в пространстве через функцию Грина ... 189
6.6. Векторные интегральные уравнения для внешних задач дифракции, получаемые с помощью функции Грина (трехмерный случай) ... 190
6.6.1. Металлический объект ... 190
6.6.2. Диэлектрический объект ... 192
6.7. Интегральные уравнения при решении внутренних задач электродинамики ... 194
6.8. Определение поля излучения (рассеяния) в дальней зоне по известным значениям полей, рассчитанным в ближней зоне ... 199
6.8.1. Частотный подход ... 200
6.8.2. Временной подход ... 203
6.9. Гибридные электродинамические методы ... 205
6.9.1. Основные соотношения гибридного метода моментов физической оптики ... 205
6.9.2. К выбору базисных и проекционных функций ... 209

6.10. Пакеты программ для численного анализа электромагнитных полей методом моментов и гибридным методом ... 211

ГЛАВА 7. Алгоритмы глобальной оптимизации ... 213

7.1. Генетический алгоритм ... 213
7.1.1. Идея алгоритма ... 213
7.1.2. Описание алгоритма ... 214
7.1.3. Модификации генетического алгоритма ... 218
7.1.4. Пример оптимизации невыпуклой функции ... 218
7.2. Алгоритм пчел для глобальной оптимизации ... 220
7.2.1. Идея алгоритма ... 220
7.2.2. Описание алгоритма ... 221
7.2.3. Пример минимизации функции с одним экстремумом ... 224
7.2.4. Пример оптимизации невыпуклой функции ... 227
7.3. К сравнению метода пчел и ГА ... 230

ГЛАВА 8. Примеры численного моделирования задач прикладной электродинамики ... 232

8.1. Подготовительный этап моделирования характеристик щелевых металлодиэлектрических неоднородных излучателей в составе фазированной антенной решетки ... 232
8.1.1. Введение ... 233
8.1.2. Конструкция излучателя и антенного полотна ... 234
8.1.3. Описание геометрии излучателя ... 237
8.1.4.Тестирование программ численного моделирования ... 242
8.2. Ресурсоемкость и особенности формирования сетки в процедурах численного моделирования, схема питания (возбуждения) элемента, особенности функционирования МНИ ... 247
8.2.1. Базовое антенное полотно МНИ для полосы 4....12 ГГц ... 247
8.2.2. Ресурсоемкость и особенности формирования пространственной сетки ... 248
8.2.3. Моделирование структуры электромагнитного поля МНИ ... 254
8.2.4. Схема питания (возбуждения) элемента АР ... 257
8.2.5. Оптимизация схемы питания ... 261
8.3 Моделирование влияния геометрических параметров излучателя на качество согласования МНИ на модели полотна бесконечной двумерной АР ... 264
8.3.1. Классификация параметров. Порядок проведения численных экспериментов. Форма представления результатов ... 264
8.3.2. Влияние параметров диэлектрической подложки ... 266
8.3.3. Влияние параметров расширяющейся щели ... 268
8.3.4. Влияние параметров геометрии в месте пересечения полосковой и щелевой линий ... 273

8.3.5. Влияние параметров геометрии антенной решетки 274
8.4. Влияние фактора сканирования на качество согласования антенного элемента для модели полотна бесконечной двумерной АР.....277
8.5 Парциальная диаграмма направленности и коэффициент усиления антенного элемента на модели бесконечной АР.....279
8.5.1. Парциальная диаграмма направленности элемента 281
8.5.2. Коэффициент усиления..... 282
8.6. Характеристики полотна конечных АР из МНИ.....284
8.6.1. Коэффициент отражения от входов элементов..... 284
8.6.2 Коэффициент взаимной связи элементов в антенном полотне 289
8.6.3. Диаграммы направленности антенных решеток..... 290
8.7. Итоги численного моделирование характеристик щелевых МНИ в составе ФАР 297
8.8. Моделирование задачи восстановления параметров дорожных покрытий, зондируемых сверширокополосным короткоимпульсным сигналом 299
8.8.1. Введение..... 299
8.8.2. Электродинамические основы реконструкции электрофизических и геометрических параметров диэлектрических объектов. Выбор модели дорожных покрытий..... 301
8.9. Алгоритм задачи восстановления параметров дорожных покрытий 302
8.9.1. Метод вычислительной диагностики..... 302
8.9.2. Решение прямой задачи при использовании метода вычислительной диагностики..... 304
8.9.3. О методах глобальной оптимизации..... 305
8.9.4. Численный пример восстановления геометрических и электрофизических параметров трехслойной плоскослоистой среды 306
8.9.5. Численный пример восстановления геометрических и электрофизических параметров четырехслойной плоскослоистой среды 310

Приложение 1. Некоторые сведения о пространствах, функционалах и операторах 313

Приложение 2. К классификации матриц.....317

Приложение 3. Описание и функции программы «Максвелл +».....318

Список литературы.....326

Предметный указатель 328



Александр Юрьевич Гринев –
доктор технических наук, профессор кафедры «Радиофизика, антенны и микроволновая техника», Московский авиационный институт (Государственный технический университет).
Лауреат премии Совета Министров СССР.
Область научных интересов: радиооптика, антенны и устройства СВЧ, широкополосные и сверхширокополосные сигналы и системы, численные методы прикладной электродинамики.
Автор (соавтор) монографий и учебных пособий:
«Радиооптические антенные решетки», 1986; «Автоматизированное проектирование антенн и устройств СВЧ», 1988; "Electrooptical Arrays", 1989; «Основы радиооптики», 2003; «Антенны и устройства СВЧ (проектирование ФАР)», 2003; «Вопросы подповерхностной радиолокации», 2005; «Оптические устройства в радиотехнике», 2009; «Широкополосные и СШП-сигналы и системы», 2009.

Рассмотрены базовые численные методы решения электродинамических задач. Дано самое общее, но адекватное представление о принципах решения задач электродинамики, используемых в программных продуктах на основе ММ, МКР, МКРВО и МКЭ. Приведено описание пакетов программ для численного анализа электромагнитных полей с помощью указанных методов. Представлены примеры процедур численного анализа.
Для преподавателей и студентов радиотехнических специальностей вузов. Может быть полезна разработчикам электродинамических методов (подходов, алгоритмов), программистам и пользователям ЭВМ.

ISBN 978-5-88070-304-3